ETUDE DE L'EQUATION HARMONIQUE DANS UN OUVERT AVEC DES CONDITIONS NONLINEAIRES DE FLUX AU BORD.

Youssouf Oussama Boukarabila

UNIVERSITÉ FRANÇOIS-RABELAIS DE TOURS

ÉCOLE DOCTORALE MIPTIS

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique

THÈSE présentée par :

BOUKARABILA Youssouf Oussama

soutenue le : **21 Juin 2016**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université François - Rabelais de Tours**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques**

ÉTUDE DE L'ÉQUATION HARMONIQUE DANS UN OUVERT AVEC DES CONDITIONS NONLINÉAIRES DE FLUX AU BORD

THÈSE dirigée par :

VÉRON Laurent	Professeur émérite, Université François-Rabelais

RAPPORTEURS :

GUEDDA Mohammed	Professeur, Université de Picardie, Amiens
KAVIAN Otared	Professeur, Université de Versailles-Saint Quentin, Versailles

JURY :

GUEDDA Mohammed	Professeur, Université de Picardie, Amiens
HUMBERT Emmanuel	Professeur, Université François-Rabelais, Tours
KAVIAN Otared	Professeur, Université de Versailles-Saint Quentin, Versailles
MOLINET Luc	Professeur, Université François-Rabelais, Tours
SOUPLET Philippe	Professeur, Université de Paris 13, Paris
VÉRON Laurent	Professeur émérite, Université François-Rabelais, Tours

Un soir, je pris du café noir
contrairement à mon habitude ;
je ne pus m'endormir ; les
idées surgissaient en foule ; je
les sentais comme se heurter,
jusqu'à ce que deux d'entre elles
s'accrochassent pour ainsi dire pour
former une combinaison stable...

Henri Poincaré

Remerciements

Je dois l'admettre, c'est un moment difficile d'exprimer avec les bons mots ma gratitude envers les personnes qui m'ont soutenu durant mon Ph.D.

Je tiens à remercier énormément mon directeur de thèse le Professeur Laurent VÉRON d'avoir accepter de diriger ma thèse. Les mots ne seront jamais suffisant pour lui remercier de son encouragement sans limite et de ses qualités humaines. Je lui remercie de sa patience et de ses notes, j'ai appris beaucoup en travaillant à ses côtés.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux Pr. Mohammad GUEDDA et Otared KAVIAN pour l'honneur qu'ils m'ont accorder en acceptant d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie également les Pr. Emmanuel HUMBERT, Luc MOLINET et Philippe SOUPLET d'avoir accepter d'être examinateurs de mon travail.

Un grand merci va au Professeur de l'université de Tlemcen Boumediene ABDELLAOUI qui a dirigé mon stage de Master 2. Je lui remercie de m'avoir encouragé de continuer mes études supérieures et qui m'a aidé pour venir à Tours, et de rencontrer le Pr.VÉRON. J'aimerai aussi remercier tout ceux qui m'ont enseigné durant les cinq années de Licence et de Master à Tlemcen.

Merci à tous les membres du LMPT qui créent un environnement plaisant de travail, merci pour leur aide quotidien. J'adresse un remerciement particulier à tous mes collègues et amis les doctorants dont on partage l'aventure de Ph.D ensemble.

Merci à tous mes amis pour leurs soutien pendant cette période de ma vie.

Enfin, un remerciement particulier va à mes parents, mes soeurs et à tous les membres de ma famille.

Youcef Oussama BOUKARABILA

Résumé

L'objectif principal de cette thèse est divisé en deux parties.

La première partie est consacrée à l'étude du problème,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = \mu \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

où Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$, $g(\cdot)$ est une fonction continue qui vérifie la condition du signe $s \cdot g(s) \geq 0$, dans certains modèles on ajoute l'hypothèse $g(\cdot)$ croissante, et finalement μ est une mesure bornée sur $\partial\Omega$. Certains de nos résultats sont valables lorsque $\Omega := \mathbb{R}^N_+$.

On commencera par montrer l'existence de solution de (0.1) lorsque μ est une fonction de $L^1(\partial\Omega)$, et cela sans ajouter une hypothèse supplémentaire sur $g(\cdot)$. Puis, on étudiera (0.1) lorsque μ est une mesure de Radon sur $\partial\Omega$, dans ce contexte, le problème (0.1) pourra ne pas admettre une solution, et des conditions apparaissent sur $g(\cdot)$ et sur μ pour assurer l'existence d'une solution. On montrera l'existence de solutions lorsque, $g(\cdot)$ est une non-linéarité sous-critique en dimension N supérieure ou égale à trois, et lorsque $g(\cdot)$ satisfait l'hypothèse de singularité faible sur le bord en dimension N égale à deux (voir Chapitre 2 pour définitions). Lorsque $\Omega := \mathbb{R}^2_+$ et $\mu := c\,\delta_0$, notre résultat atteste que le problème (0.1) admet une solution si et seulement si :

$$\frac{\pi}{a_-(g)} \leq c \leq \frac{\pi}{a_+(g)},$$

où $a_-(g)$ et $a_+(g)$ dénotent les ordres de croissance exponentielle de la fonction $g(\cdot)$, respectivement en moins et plus l'infini (voir Chapitre 2).

Finalement, on fixe $g(u) := |u|^{p-1}\,u$, où $p > 1$, alors on montrera que le problème (0.1) admet une solution si la mesure μ est absolument continue par rapport à la capacité $C_{1,p'}$. Puis, dans le cas où le problème (0.1) admet une solution pour une mesure de Radon positive μ, alors nécessairement cette mesure est absolument continue par rapport à la capacité $C_{1,p'}$. Ceci permet de déduire que si $c \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \partial\Omega$ alors le problème (0.1) à donnée $\mu = c\,\delta_a$ n'admet pas de solution lorsque :

$$p \geq \frac{N-1}{N-2}.$$

La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude de singularités du problème,

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1}\,u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\backslash\{a\}, \end{cases} \tag{0.2}$$

où Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $a \in \partial\Omega$, $p > 1$ et la fonction u est suffisamment régulière dans $\overline{\Omega} \setminus \{a\}$. Sans perte de généralité on fixe a comme étant l'origine 0.

On verra que la nature de singularité dépend du paramètre critique :

$$p_c := \frac{N-1}{N-2}.$$

On montrera que la singularité est éliminable lorsque $p \geq p_c$. Lorsque $1 < p < p_c$, en considérant les coordonnées sphériques, on obtiendra que $r^{\frac{1}{p-1}}u(r,\sigma)$ converge quand $r \to 0$ vers une composante compacte et connexe d'un certain ensemble $\mathcal{E}$. Maintenant, si $1/(p-1) \notin \mathbb{N}$, et si l'une de conditions suivantes a lieu :

i) si $N = 2$,

ii) si $u(x)\,|x|^{\frac{1}{p-1}} \to 0$, quand $|x| \to 0$,

iii) si u est positive et $\dfrac{N}{(N-1)} < p < p_c$,

alors, on déduit une classification précise des singularités de l'équation (0.2). Ces résultats seront énoncer respectivement dans Théorème 4.13, Théorème 4.12 et Théorème 4.11.

Abstract

The main aim of this thesis is divided into two parts.

The first part is devoted to the study of the problem,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \text{ in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = \mu \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.3}$$

where Ω is a bounded regular domain of $\mathbb{R}^N$, $g(\cdot)$ is a continuous function that satisfies the sign condition $s \cdot g(s) \geq 0$, in some model case we will assume that $g(\cdot)$ is increassing, and finally μ is a bounded measure on $\partial\Omega$. Some of our results remain true when $\Omega := \mathbb{R}^N_+$.

We will start by proving the existence of a solution of (0.3) when μ is an $L^1(\partial\Omega)$ function, and this independently of the nonlinearity $g(\cdot)$ that satisfies the previous hypothesis. Then, we will study (0.3) when μ is a Radon measure on $\partial\Omega$. In such a context, some new conditions appear on $g(\cdot)$ and μ that assure the existence of a solution. We will prove the existence of a solution when $g(\cdot)$ is a sub-critical nonlinearity in dimension N larger or equal to three, and when g satisfies the weak singularity assumption on the boundary in case N equals two (see Chapter 2 for the definitions). When $\Omega := \mathbb{R}^2_+$ and $\mu := c\,\delta_0$, our result states that the problem (0.3) admits a solution if and only if

$$\frac{\pi}{a_-(g)} \leq c \leq \frac{\pi}{a_+(g)},$$

where $a_-(g)$ and $a_+(g)$ denote the exponential order of growth of the function $g(\cdot)$, respectively at minus and plus infinity (see Chapter 2).

Finally, we fix $g(u) := |u|^{p-1}\,u$, where $p > 1$, so we will prove that the problem (0.3) admits a solution if the measure μ is diffuse with respect to the capacity $C_{1,p'}$. After, if μ is a positive measure for which (0.3) admits a solution, then necessarily this measure must be diffuse with respect to the capacity $C_{1,p'}$. This allows us to deduce that if $c \in \mathbb{R}^*$ and $a \in \partial\Omega$, then the problem (0.3) with data $\mu = c\,\delta_0$ does not have a solution when

$$p \geq \frac{N-1}{N-2}.$$

The second part of this thesis is devoted to study the singularities of the problem,

$$\begin{cases} -\,\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1}\,u = 0 \text{ on } \partial\Omega\backslash\{a\}, \end{cases} \tag{0.4}$$

where Ω is a bounded regular domain of $\mathbb{R}^N$ such that $a \in \partial\Omega$, $p > 1$ and the function u is smooth enough in $\overline{\Omega} \setminus \{a\}$. Without loss of generality we fix a to be the origin 0.

We will see that the nature of the singularity depends on the critical parameter

$$p_c := \frac{N-1}{N-2}.$$

We will prove that the singularity is removable in the case $p \geq p_c$. In the second case when $1 < p < p_c$, if we consider the spherical coordinates, we will obtain that $r^{\frac{1}{p-1}}\,u(r,\sigma)$ converges (when $r \to 0$) to a connected compact component of some set $\mathcal{E}$. Now, if $1/(p-1) \notin \mathbb{N}$, and if one of the following conditions holds :

i) if $N = 2$,

ii) if $u(x)\ |x|^{\frac{1}{p-1}} \to 0$, when $|x| \to 0$,

iii) if u is positif and $\dfrac{N}{(N-1)} < p < p_c$,

then we deduce a precise classification of singularities of the equation (0.4). This will be done by Theorem 4.13, Theorem 4.12 and Theorem 4.11, respectively.

Table des matières

Introduction

L'objectif de cette thèse est de présenter de nouveaux résultats [9] concernant certaines classes de problèmes non locaux.

Considérons le problème,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \;\text{ dans }\; \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = \mu \;\text{ sur }\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.5}$$

où Ω est un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$, $g(\cdot)$ est une fonction continue qui vérifie la condition du signe $s \cdot g(s) \geq 0$, et μ est une mesure bornée sur $\partial\Omega$. Dans certains modèles, $g(\cdot)$ est supposée croissante, cette hypothèse entraîne l'unicité de solution du problème (0.5) si elle existe. Dans certains de nos résultats, Ω est considéré comme étant le demi espace $\mathbb{R}^N_+$, et certains autres résultats on les a annoncés dans un domaine Ω borné, malgré qu'ils fussent valables lorsque $\Omega := \mathbb{R}^N_+$.

Dans [11], H.Brezis et A.C.Ponce ont motivé l'étude du problème (0.5).

L'étude d'équations elliptiques à donnée L^1 et plus généralement des mesures finies remonte aux travaux de Stampacchia dans [33].

H.Brezis et W.Strauss [13] ont étudié le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + |u|^{p-1}u = \mu \;\text{ dans }\; \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 \;\text{ sur }\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.6}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$ et $\mu \in L^1(\Omega)$. Ils ont établi que (0.6) admet une solution unique pour toute $\mu \in L^1(\Omega)$.

Dans le cas où $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, P.Bénilan et H.Brezis [6] ont établi le résultat suivant à propos du problème

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu \;\text{ dans }\; \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 \;\text{ sur }\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.7}$$

Proposition 0.1. *Supposons $g(\cdot)$ une fonction continue qui vérifie la condition du signe $s \cdot g(s) \geq 0$. Si $g(\cdot)$ est sous-critique au sens suivant*

$$|g(t)| \leq C(|t|^p + 1),$$

pour $0 < p < \frac{N}{N-2}$, alors pour toute $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, le problème (0.7) admet une solution.

Un résultat particulièrement significatif a été obtenu par P.Bénilan et H.Brezis (voir [6], [16]) et qui permet de montrer une différence majeure entre la théorie non linéaire à donnée L^1 et celle à donnée mesure. Ce résultat est :

Proposition 0.2. *Soit $a \in \Omega$. Si $p \geq \frac{N}{N-2}$, alors le problème non linéaire*

$$\begin{cases} -\Delta u \, + \, |u|^{p-1}u \, = \delta_a \quad dans \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.8}$$

n'admet pas de solution.

Une autre alternative pour étudier, l'existence ou la non existence, de solution du problème (0.8), est d'étudier la singularité de l'équation

$$-\,\Delta u \, + \, |u|^{p-1}u \, = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \setminus \{a\}, \tag{0.9}$$

où $p \geq N/(N-2)$, $u \in C^2(\Omega \setminus \{a\})$ et le point $a \in \Omega$, sans perte de généralité, on prend $a = 0$.

Ceci a été effectué par H.Brezis et L.Véron dans [14]. Ils ont établi que si $p \geq N/(N-2)$ alors la singularité de (0.9) est éliminable. Ceci signifie que u est prolongeable sur Ω en une fonction $\tilde{u}$ de classe $C^2(\Omega)$ qui vérifie,

$$-\,\Delta \tilde{u} \, + \, |\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u} = 0 \ \text{ dans } \ \Omega. \tag{0.10}$$

Il est claire que si le problème (0.8) admet une solution alors il ne sera pas possible de prolonger n'importe quel solution de (0.9) en une fonction de classe $C^2(\Omega)$.

A.Gmira et L.Véron dans [25] ont initié le problème

$$\begin{cases} -\Delta u \, + g(u) = 0 \ \text{ dans } \ \Omega, \\ \qquad\qquad u = \mu \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.11}$$

Ils ont établi que si la non linéarité g est croissante et sous-critique au sens que

$$\int_1^{+\infty} (g(s) \, + \, |g(-s)|) \, s^{-2N/(N-1)} \, ds < \infty, \tag{0.12}$$

alors le problème (0.11) admet une solution unique pour toute mesure de Radon $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$.

Lorsque $g(u) := |u|^{p-1}u$, la condition (0.12) est équivalente à

$$1 < p < \frac{N+1}{N-1}.$$

Ensuite, dans le même travail, Gmira et Véron ont établit que les singularités sur le bord du problème

$$\begin{cases} -\Delta u \, + |u|^{p-1}u = 0 \ \text{ dans } \ \Omega, \\ \qquad\qquad u = \phi \ \text{ sur } \ \partial\Omega \setminus \{a\}, \end{cases} \tag{0.13}$$

où $a \in \partial\Omega$, $\phi \in C(\partial\Omega)$ et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \setminus \{a\})$ sont éliminables lorsque

$$p \geq \frac{N+1}{N-1}.$$

Enfin, Gmira et Véron ont classifié les singularités du problème

$$\begin{cases} -\Delta u \, + |u|^{p-1}u = 0 \ \text{ dans } \ \Omega, \\ \qquad\qquad u = \phi \ \text{ sur } \ \partial\Omega \setminus \{a\}, \end{cases} \tag{0.14}$$

lorsque

$$1 < p < \frac{N+1}{N-1}.$$

On pourra décrire leur méthode comme une adaptation de la théorie de système dynamique en dimension infinie. Cette méthode a été aussi utilisé dans [19] et elle sera utilisée dans ce manuscrit.

Lorsque la dimension N est égale à deux, l'étude de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu \text{ dans } \Omega, \\ \qquad\quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.15}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$ et μ est une mesure de Radon sur Ω, a été complètement achevée grâce aux travaux de J.L.Vazquez [36]. J.L.Vazquez a définit les deux paramètres suivants

$$a_+(g) := \inf\left\{a \geq 0 : \int_0^\infty g(s)e^{-as}\,ds < \infty\right\}, \tag{0.16}$$

et,

$$a_-(g) := \sup\left\{a \leq 0 : \int_{-\infty}^0 g(s)e^{-as}\,ds > -\infty\right\}. \tag{0.17}$$

Rappelons que toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ admet la décomposition de Lebesgue suivante,

$$\mu = \mu_r + \mu_s + \sum_{i\in I} c_i\,\delta_{x_i},$$

où μ_r est la partie régulière de la décomposition par rapport à la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}_2$ et μ_s est la partie singulière non atomique, l'ensemble $\{c_i, x_i\}_{i\in I}$ désigne l'ensemble au plus dénombrable des atomes.

Avec ces notations, J.L.Vazquez a démontré le résultat suivant

Théorème 0.1. *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Le problème (0.15) admet une solution si et seulement si*

$$\frac{2\pi}{a_-(g)} \leq c_i \leq \frac{2\pi}{a_+(g)}. \tag{0.18}$$

Une étape importante pour étudier notre problème (0.5) consiste à développer la théorie linéaire de ce problème. On considère donc l'équation,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \nu \text{ dans } \Omega, \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial n} = \mu \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.19}$$

où ν est une mesure de Radon dans Ω, et μ est une mesure de Radon sur $\partial\Omega$. On verra au Chapitre 1 que la solution u du problème linéaire (0.19) appartient à l'espace de Sobolev $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < N/(N-1)$, on verra que la régularité optimale de la solution u est $u \in M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$, $\nabla u \in M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$ (Proposition 1.3). Comme conséquence, la trace de la solution u sur le bord appartient à l'espace $M^{\frac{N-1}{N-2}}(\Omega)$ si $N \geq 3$ et $L^p(\partial\Omega)$ si $N = 2$ (Proposition 1.4). On verra que l'exposant,

$$p_c := \frac{N-1}{N-2}$$

jouera un rôle important dans tout les problèmes qu'on abordera dans cette thèse lorsque la dimension N est supérieure ou égale à trois. À la fin du Chapitre 1, en suivant la méthode de H.Brezis dans un travail non publié (voir [37], Theorem 2.4) lorsqu'il a étudié le problème de Dirichlet, on a obtenu dans le Lemme 1.2 certains estimations sur les solutions de (0.19) à données L^1, ces estimations permettent d'avoir un principe de comparaison pour le problème (0.5) (Corollaire 1.3 et Corollaire 1.4).

Avec ces outils qu'on a obtenu à partir de la théorie linéaire, on commencera dans Chapitre 2 l'étude du problème (0.5). Le premier résultat obtenu, est que si $\mu \in L^1(\partial\Omega)$ alors (0.5) admet une solution. Dans les problèmes à donnée L^1, l'existence de solution ne dépend pas de la non linéarité g. Après, on traite le problème (0.5) lorsque μ est une mesure bornée sur $\partial\Omega$. Dans ce cas, l'existence de solution dépendra de la mesure μ et de la non linéarité $g(\cdot)$. Notre premier résultat d'existence, est :

Théorème 0.2. *Supposons $N \geq 3$ et g une fonction continue qui satisfait la condition de signe. Si g vérifie*

$$\int_1^\infty (g(s) + |g(-s)|) s^{-(2N-3)/(N-2)}\, ds < \infty, \tag{0.20}$$

alors pour toute $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$, le problème (0.5) admet une solution u, en plus on a l'estimation,

$$\int_\Omega |u|\, dx + \int_{\partial\Omega} |g(u)|\, dS \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}. \tag{0.21}$$

Si en plus g est croissante, alors la solution est unique.

Lorsque $N = 2$, en s'inspirant du travail de J.L.Vazquez cité précédemment, on remarque que le problème (0.5) a la particularité qu'on pourra décrire la condition nécessaire pour qu'il admette une solution. Et il se trouve que cette condition est suffisante ! Ainsi, si $\Omega := \mathbb{R}^2_+$, on démontrera le théorème suivant

Théorème 0.3. *Soit g une fonction de classe C^2, convexe, et qui vérifie la condition du signe ($s \cdot g(s) \geq 0$). Si de plus g vérifie l'une des conditions suivantes*

i) les deux quantités $a_+(g)$ et $a_-(g)$ sont atteintes,

ii) g est croissante,

iii) g vérifie la condition d'intégrabilité sur $\partial\Omega$.

Alors le problème,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad \text{dans} \;\; \mathbb{R}^2_+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = c\,\delta_0 \quad \text{sur} \;\; \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{0.22}$$

admet une solution u si et seulement si

$$\frac{\pi}{a_-(g)} \leq c \leq \frac{\pi}{a_+(g)}. \tag{0.23}$$

Il est important de noter que le comportement de la deuxième solution fondamentale du problème (0.19), qui est introduite dans l'Appendice 5.5, joue un rôle caché dans cette particularité de la dimension deux.

Maintenant, on fixe $g(u) := |u|^{p-1}\, u$ où $p \geq 1$, cette non linéarité est sous-critique (au sens qu'elle vérifie (0.20)) si $p < p_c$. Une question se pose sur l'existence ou non de solution lorsque $p \geq p_c$? La réponse à cette question est détaillée au Chapitre 3. Dans lequel on a prouvé que si la mesure μ est absolument continue par rapport à la capacité $C_{1,p'}$ définie sur le bord, alors le problème non linéaire admet une solution. On a réussi à montrer que cette condition est nécessaire dans le cas où la mesure μ est positive, ceci est annoncé par

Théorème 0.4. *Le problème (0.5) est résoluble pour $\mu \in \mathcal{M}_+(\partial\Omega)$ si et seulement si $\mu(E) = 0$ pour tout ensemble borélien $E \subset \partial\Omega$ tel que $C_{1,p'}(E) = 0$.*

À partir de ce théorème, on conclura que le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1} u = \gamma \delta_a \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.24}$$

où $\gamma \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \partial\Omega$, n'admet pas de solution lorsque $p \geq p_c$. Ceci vient du fait que la mesure non nulle $\gamma\,\delta_a$ charge (c'est à dire $\gamma\,\delta_a(E) \neq 0$) tout ensemble borélien E à capacité nulle dès qu'elle contient le point a. Ce résultat constitue une analogie à celui de Bénilan et Brézis énoncé dans Proposition 0.2.

À la fin du Chapitre 3, on commence à étudier la singularité du problème,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1} u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \backslash \{0\}, \end{cases} \tag{0.25}$$

où $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ est une solution positive et $p \geq p_c$. On prouve que la singularité de (0.25) est éliminable en 0, plus précisément, on montre

Théorème 0.5. *On considère $p \geq (N-1)/(N-2)$ et $a \in \partial\Omega$. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{a\})$ une solution positive de,*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + u^p = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega \setminus \{a\}. \end{cases} \tag{0.26}$$

Alors $u = 0$.

Ensuite, on montre le résultat plus fort suivant :

Théorème 0.6. *Supposons $p \geq \dfrac{N-1}{N-2}$. Soit K un compact inclus dans $\partial\Omega$ et $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus K)$ une solution positive de,*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + u^p = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega \setminus K. \end{cases} \tag{0.27}$$

Si $C_{1,p'}(K) = 0$ alors $u = 0$.

Dans le Chapitre 4, on considère $1 < p < p_c$, et on étudie les singularités du problème,

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1} u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \setminus \{0\}, \end{cases} \tag{0.28}$$

où Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$ et $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$. La méthode et les notations qu'on utilise, trouvent leurs origines dans le travail de Gmira-Veron [25]. L'estimation clé pour cette méthode est l'estimation suivante de type Keller-Osserman ([27], [30])

$$|u(x)| \leq C_1\, |x|^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{0.29}$$

A l'aide de méthode de Moser, nous avons obtenu cette estimation dans le cas de solutions positives. On dénote par (r, σ) les coordonnées sphériques de $\mathbb{R}^N$, si on définie

$$v(t, \sigma) = r^{\frac{1}{p-1}}\, u(r, \sigma) \quad \text{avec} \quad t = \log r, \tag{0.30}$$

et si $\mathcal{E}$ dénote l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} \Delta_S \omega \, + \, l_{p,N}\omega = 0 \ \ \text{dans} \ \ S_+^{N-1}, \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \phi} \, + \, |\omega|^{p-1}\,\omega = 0 \ \ \text{sur} \ \ S^{N-2}(= \partial S_+^{N-1}), \end{cases} \tag{0.31}$$

où $l_{p,N} := \dfrac{1}{p-1}\Big(\dfrac{1}{p-1} + 2 - N\Big)$,

alors on montrera,

Théorème 0.7. *Supposons que $1 < p < p_c$ et que le domaine Ω est borné de classe C^2. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$ une solution de (0.28) qui vérifie (0.29). Alors il existe une composante connexe et compacte $\mathcal{F}$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ de solutions de (0.31) tel que :*

$$\lim_{r\to 0} dist_{C^2(S_+^{N-1})}\Big(|x|^{\frac{1}{p-1}}u(x), \mathcal{F}\Big) = 0. \tag{0.32}$$

Une étude approfondie de la structure de l'ensemble $\mathcal{E}$, donne que l'ensemble $\mathcal{E}$ est discret si et seulement si

$$\frac{N}{N-1} < p < \frac{N-1}{N-2}.$$

Dans un tel cas $\mathcal{E} := \{-\omega, 0, \omega\}$ où $\omega > 0$.

Ce cas particulier permet une classification précise de singularités,

Théorème 0.8. *On considère $N \geq 3$. Avec les mêmes hypothèses que le Théorème 0.7, on suppose en plus que u est positive au voisinage du point 0 et*

$$\frac{N}{N-1} < p < \frac{N-1}{N-2}. \tag{0.33}$$

Alors,

(i) *Soit il existe $\alpha \geq 0$ tel que*

$$\lim_{x\to 0} |x|^{N-2}\,u(x) = \alpha, \tag{0.34}$$

et par conséquent u se prolonge en 0 vers une solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\,\Delta v = 0 \ \ \ \textit{dans} \ \ \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} \, + \, |v|^{p-1}\,v = c_N\,\alpha\,\delta_0 \ \ \ \textit{sur} \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.35}$$

avec $c_N = \dfrac{N(N-2)\omega_N}{2}$.

(ii) *Ou bien*

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\frac{1}{p-1}}u(x) = \omega(\sigma), \tag{0.36}$$

uniformément par rapport à σ, où ω est l'unique solution strictement positive de (0.31).

Dans le cas où $v(t,.)$ converge vers 0, on décrira le comportement précise de la solution u de (0.28) au voisinage de 0 en termes de fonctions harmoniques sphériques, plus précisément,

Théorème 0.9. *On considère $N \geq 3$ et Ω un domaine bornée régulier de $\mathbb{R}^N$. On suppose que*

$$1 < p < (N-1)/(N-2),$$

et que

$$\frac{1}{p-1} \notin \mathbb{N}.$$

Si $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ est une solution de (0.28) qui vérifie

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\frac{1}{p-1}} u(x) = 0. \tag{0.37}$$

Alors,

i) Soit, $u = 0$.

ii) Soit, il existe un entier $k \in [N-2, \dfrac{1}{p-1})$ et une fonction harmonique sphérique non nulle ψ de degré $k+2-N$ qui vérifie $\dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0$ tel que

$$\lim_{r \to 0} r^k \, u(r, \cdot) \; = \; \psi(\cdot), \tag{0.38}$$

dans $C^2(S_+^{N-1})$.

Dans la preuve qu'on a suivi, il nous semble que l'hypothèse, $1/(p-1)$ n'est pas un entier, est une hypothèse technique.

Dans le cas particulier de la dimension deux, l'ensemble $\mathcal{E}$ est toujours discret, ceci donnera le théorème suivant :

Théorème 0.10. *On suppose $N = 2$. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ une solution de (0.28) qui vérifie l'estimation (0.29). Si $\dfrac{1}{p-1} \notin \mathbb{N}$ alors*

(i) Soit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{\log |x|} = -\alpha, \tag{0.39}$$

et u se prolonge en 0 comme étant une solution de

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} \; + \; |v|^{p-1} \, v = \pi \, \alpha \, \delta_0 \quad sur \quad \partial \Omega. \end{cases} \tag{0.40}$$

(ii) Ou bien

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\frac{1}{p-1}} u(x) = \omega(\sigma), \tag{0.41}$$

uniformément par rapport à σ, où ω est une solution non nulle de (0.31).

Si on considère $\Omega := \mathbb{R}_+^N$, alors l'équation (0.28) est le problème d'extension harmonique du problème non local,

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u \; + \; |u|^{p-1} u = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^{N-1} \setminus \{0\}. \tag{0.42}$$

(voir article Caffarelli-Silvestre [18]).

Si on ajoute la condition d'une singularité non triviale

$$\lim_{x\to 0} u(x) = +\infty,$$

alors ce problème a été étudié récemment par Chen-Veron dans [21], leur Théorème 1.1 constitue le résultat principal de classification dans cet article. Si dans notre Théorème 0.8, on restreindra la variable x au bord, alors notre résultat et celui de Chen-Veron sont identiques.

Chapitre 1

Problèmes linéaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude du problème de Neumann linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \nu \ \text{ dans } \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \mu \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où Ω, ν et μ désignent respectivement, un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^N$, une mesure de Radon sur Ω, et une mesure de Radon sur $\partial\Omega$. On rappelle qu'une mesure de Radon sur un domaine $\mathcal{D}$ est une forme linéaire sur les fonctions continues à support dans $\mathcal{D}$, continue pour une certaine topologie.

On va voir que le problème (1.1) admet une solution unique pour toute donnée (ν, μ) dans $\mathcal{M}_b(\Omega) \times \mathcal{M}(\partial\Omega)$ (Proposition 1.3), et que cette solution ainsi que sa trace sur le bord, appartiennent à une classe de fonctions entre les espaces de Sobolev, ce qui permettra d'avoir un résultat de compacité lié au problème (1.1) (Remarque 1.3). Dans la deuxième partie de ce chapitre, on verra quelques résultats de comparaison liés au problème (1.1), à noter que l'outil principale de comparaison est le Lemme 1.2. Le Corollaire 1.3 et 1.4 joueront un rôle fondamentale dans les prochains chapitres.

1.2 Cadre linéaire

Commençons d'abord par donner un sens à l'équation (1.1).

Le sens de solution de (1.1) qu'on va adopter est le suivant.

Définition 1.1. *La fonction u est une solution du problème de Neumann linéaire (1.1) si,*

1) $u \in L^1(\Omega)$,

2) $(\forall \xi \in \mathcal{C}_\Omega) \ \displaystyle\int_\Omega u\,(-\Delta\xi + \xi)\,dx = \int_\Omega \xi d\nu + \int_{\partial\Omega} \xi\,d\mu,$

où :

$$\mathcal{C}_\Omega = \{\xi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) : \Delta\xi \in L^\infty(\Omega) \ \ \textit{et} \ \ \frac{\partial\xi}{\partial n} = 0 \ \ \textit{sur} \ \ \partial\Omega\}.$$

□

Une définition équivalente de la solution est la suivante :

a) $u \in W^{1,1}(\Omega)$,

b) $(\forall \xi \in W^{1,\infty}(\Omega))\ \int_\Omega \nabla u \nabla \xi \, dx + \int_\Omega u \, \xi \, dx = \int_\Omega \xi d\nu + \int_{\partial\Omega} \xi \, d\mu.$

Cette dernière définition a l'avantage de donner comme sens à $u\lfloor_{\partial\Omega}$, la trace d'une fonction appartenant à l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$. Par ailleurs, elle impose que $\nabla u \in L^1(\Omega)$, ce qui la rend "lourde" à utiliser. On verra par la suite que le résultat de régularité dans la Proposition1.3 permet de montrer l'équivalence entre ces deux définitions. Ce qui justifie notre recours à la première définition qui est simple à utiliser.

Définition 1.2. *Soit $v \in W^{1,1}(\Omega)$ tel que Δv est une mesure de Radon μ dans Ω. La dérivée normale de v sur $\partial\Omega$ est la distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ définie par :*

$$\langle T, \xi \rangle := \int_\Omega \xi \, d\mu + \int_\Omega \nabla v \nabla \xi \, dx \qquad (\forall \xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)). \tag{1.2}$$

Notons cette distribution $\frac{\partial v}{\partial n}$. Cette distribution a un support inclus dans $\partial\Omega$.

En effet, si $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ a un support inclus dans $\mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega}$, il est clair que $\langle T, \xi \rangle = 0$.

Et, si ξ a un support inclus dans Ω alors $\int_\Omega \nabla v \nabla \xi = -\int_\Omega \xi d\mu$ et donc $\langle T, \xi \rangle = 0$.

Notation :

On note $\mathbb{H}[\mu, \nu]$ la solution du problème (1.1), et $\mathbb{H}_\mu = \mathbb{H}[\mu, 0]$, et par $\mathbb{D}_\mu$ la trace de $\mathbb{H}_\mu$ sur $\partial\Omega$.

1.2.1 Espaces de Marcinkiewicz

Une importante classe des fonctions qui jouera un rôle cruciale dans l'étude de problèmes à données mesures est la classe des espaces de Marcinkiewicz.

Définition 1.3. *Soient G un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ et λ une mesure de Borel positive sur G. Pour $p > 1$, $p' = p/(p-1)$ et $u \in L^1_{loc}(G, d\lambda)$ on définit,*

$$\|u\|_{M^p(G,d\lambda)} = \inf \left\{ c \in [0, \infty] : \int_E |u| \, d\lambda \le c \Big(\int_E d\lambda \Big)^{\frac{1}{p'}} \ \ \forall E \subset G, E \text{ borélien} \right\}. \tag{1.3}$$

L'espace de Marcinkiewicz (ou espace de Lebesgue faible) d'ordre p par rapport à la mesure λ est définie par,

$$M^p(G, d\lambda) = \left\{ u \in L^1_{loc}(G; d\lambda) : \|u\|_{M^p(G;d\lambda)} < \infty \right\}. \tag{1.4}$$

L'espace $M^p(G, d\lambda)$ est un quasi-espace de Banach, et on a la proposition suivante dont on peut trouver la preuve dans [5].

Proposition 1.1. *Soient $1 \le q < p < \infty$ et $u \in L^1_{loc}(G; d\lambda)$. Alors,*

$$C(p) \|u\|^p_{M^p(G;d\lambda)} \le \sup_{s>0} \left\{ s^p \int_{\{|u|>s\}} d\lambda \right\} \le \|u\|^p_{M^p(G;d\lambda)}. \tag{1.5}$$

De plus,

$$\int_E |u|^q \, d\lambda \le C(p,q) \|u\|_{M^p(G;d\lambda)} \Big(\int_E d\lambda \Big)^{1-\frac{q}{p}}, \tag{1.6}$$

pour tout ensemble borélien $E \subset G$.

Remarque 1.1. *Soient* $G = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ *et*

$$f : G \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{|x|}.$$

Alors, $\Big(f \in L^q(G) \Longleftrightarrow q < N\Big)$ *et* $f \in M^N(G)$.

Cet exemple combiné avec (1.6) permet de conclure que l'espace $M^p(G, d\lambda)$ *(la mesure* λ *est supposée bornée) est intermédiaire entre les espaces de Lebesgue* $L^p(G; d\lambda)$ *et* $L^{p-\epsilon}(G, d\lambda)$*, dans le sens*

$$L^p(G, d\,\lambda) \subsetneq M^p(G, d\,\lambda) \subsetneq L^{p-\epsilon}(G, d\,\lambda),$$

avec injection continue.

1.2.2 Espaces de Lorentz

Les espaces de Marcinkiewicz font partie d'une classe plus vaste d'espaces intermédiaires appelés espaces de Lorentz.

Soit f une fonction mesurable, si A est un sous ensemble de Ω Lebesgue-mesurable alors $|A|$ dénote sa mesure de Lebesgue. Pour $r > 1$, on définit

$$\|f\|^*_{L^{r,s}(\Omega)} = \begin{cases} \left(r \displaystyle\int_0^\infty t^s \,|\{|f(x)| > t\}|^{\frac{s}{r}} \,\frac{d\,t}{t}\right)^{\frac{1}{s}} & \text{si } s < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} \{\, t\ |\{|f(x)| > t\,\}|^{\frac{1}{r}}\} & \text{si } s = \infty. \end{cases}$$

On dit que la fonction f appartient à l'espace de Lorentz $L^{p,q}(\Omega)$ si la quantité $\|f\|^*_{L^{p,q}}$ est finie. Remarquons que $L^{p,\infty}(\Omega) = M^p(\Omega)$.

Pour voir le lien entre la quantité $\|.\|^*_{L^{p,q}}$ et la norme dans les espaces de Lebesgue, rappelons que le principe de Cavalieri atteste que

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_0^\infty |\{|f| > t\}|\ dt. \tag{1.7}$$

Ainsi, pour $p > 1$

$$\int_\Omega |f(x)|^p \,d\,x \ =\ p \int_0^\infty t^{p-1}\,|\{x : |f| > t\}|\ dt. \tag{1.8}$$

On remarque que $L^{p,p} = L^p$.

Rappelons la formule de dualité entre les espaces de Lorentz $L^{p,q}$ et $L^{p',q'}$ pour $1 < p < \infty$ et $1 \le q \le \infty$

$$\left|\int_\Omega f\,g\,dx\right| \le C\|f\|^*_{L^{p,q}}\,\|g\|^*_{L^{p',q'}}. \tag{1.9}$$

Il existe une définition plus élaborée des espaces de Lorentz en utilisant les *réarrangements*, l'intérêt d'une telle définition c'est de montrer que les quasi normes $\|.\|^*_{L^{p,q}}$ définies plus hauts sont équivalentes à des normes. Pour plus de détails le lecteur est invité à consulter [1].

1.2.3 Étude du problème linéaire

La première affirmation concernant la dérivée normale est la suivante.

Proposition 1.2. *Si $\nu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, alors la solution $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ de l'équation,*

$$-\Delta u + u = \nu \quad dans \quad \Omega, \tag{1.10}$$

appartient à $M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$, en plus $\nabla u \in M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$, et u admet une dérivée normale appartenant à $L^1(\partial\Omega)$.

Preuve : Multiplions l'équation (1.10) par $T_k(u) := sign(u)\min\{k, |u|\}$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla T_k(u) + \int_\Omega u T_k(u) = \int_\Omega T_k(u) d\nu. \tag{1.11}$$

Ceci implique :

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2 \leq k\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}.$$

On conclut [voir [4], lemma 4.1 et lemma 4.2] que :

$$|\{|u| > k\}| \leq C(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)})^{\frac{N}{N-2}} k^{-\frac{N}{N-2}}, \tag{1.12}$$

et que

$$|\{|\nabla u| > h\}| \leq C(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)})^{\frac{N}{N-1}} h^{-\frac{N}{N-1}}. \tag{1.13}$$

Ce qui signifie que $u \in M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$ et $\nabla u \in M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$.

Pour montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^1(\partial\Omega)$, on va reprendre la démonstration faite dans [12] ; Proposition 4.2.

Commençons par montrer :

$$\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|\Delta u\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Cas 1 : La fonction u est régulière sur un voisinage du bord .

Dans ce cas $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ est une fonction régulière sur le bord. Soient u_1 la solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda^+ \text{ dans } \Omega, \\ u_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et u_2 celle de :

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = \lambda^- \text{ dans } \Omega, \\ u_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $\lambda := -\Delta u$ et $u = u_1 - u_2$.

La mesure λ est régulière au voisinage du bord, ses parties positive et négative λ^+ et λ^- (respectivement) sont des fonctions continues lipschitziennes près du $\partial\Omega$. Par la suite u_1 et u_2 sont de classe C^2 près du $\partial\Omega$. Par le principe du maximum $u_1 \geq 0$ dans Ω , $u_2 \geq 0$ dans Ω, d'où :

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

De même,

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Il en résulte que :

$$\int_{\partial\Omega} |\frac{\partial u_1}{\partial n}| dS = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial n} dS = \int_\Omega \lambda^+;$$

parallèlement,

$$\int_{\partial\Omega} |\frac{\partial u_2}{\partial n}| dS = \int_\Omega \lambda^-.$$

Par conséquent,

$$\int_{\partial\Omega} |\frac{\partial u}{\partial n}| \leq \int_\Omega (\lambda^+ + \lambda^-) = \int_\Omega |\Delta u|.$$

Cas 2 : le cas général.

Soit $(\psi_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ qui vérifient :

(i) $0 \leq \psi_k \leq 1$ dans $\overline{\Omega}$,

(ii) $\psi_k(x) = 1$ si $d(x, \partial\Omega) \geq \dfrac{1}{k}$,

(iii) $\psi_k(x) = 0$ si $d(x, \partial\Omega) \leq \dfrac{1}{k^2}$.

On considère $\lambda_k = \psi_k \, \lambda = \psi_k(-\Delta u)$. La suite $\{\lambda_k\}_k$ est une suite de mesures de Radon dans Ω dont chaque élément a un support strictement inclus dans Ω. En plus $\{\lambda_k\}$ converge fortement au sens des mesures vers λ, en effet,

$$\begin{aligned} \|\lambda - \psi_k \lambda\|_{\mathcal{M}(\Omega)} &= \int_\Omega d[(1-\psi_k)\,\lambda]_+ + \int_\Omega d[(1-\psi_k)\,\lambda]_-, \\ &= \int_\Omega (1-\psi_k)\, d\lambda_+ + \int_\Omega (1-\psi_k)\, d\lambda_-, \\ &= \int_\Omega (1-\psi_k)\, d|\lambda|, \end{aligned}$$

donc, par application du théorème de convergence dominée, on conclut :

$$\lambda_k \to \lambda \ \text{ fortement dans } \ \mathcal{M}(\Omega). \tag{1.14}$$

Pour $k \geq 1$, soit u_k l'unique solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k \ \text{ dans } \ \Omega, \\ \quad u_k = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.15}$$

Par le résultat de stabilité de solutions de (1.15) (voir [8], assertion (21), et aussi [31], Proposition 4.9), lorsque $k \to \infty$ on a $u_k \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ $\forall p < N/(N-1)$. D'où :

$$(\forall \eta \in C^1(\overline{\Omega})) \quad \int_\Omega \nabla\eta.\nabla u_k \to \int_\Omega \nabla\eta.\nabla u. \tag{1.16}$$

Par multiplication de (1.15) par $\eta \in C^1(\overline{\Omega})$:

$$\int_\Omega \nabla u_k.\nabla\eta - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial n} \eta dS = \int_\Omega \eta \lambda_k.$$

Lorsqu'on fait tendre $k \to \infty$, et utilisant(1.16) ainsi que (1.14), on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \phi \, \frac{\partial u_k}{\partial n} \to \int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial n} \quad \forall \phi \in C^1(\partial\Omega). \tag{1.17}$$

La fonction u_k est harmonique au voisinage du $\partial\Omega$, donc régulière. À partir du résultat du premier cas appliqué à $u_i - u_j$,

$$\|\frac{\partial u_i}{\partial n} - \frac{\partial u_j}{\partial n}\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|\lambda_i - \lambda_j\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

Comme $\lambda_k \to \lambda$ fortement dans $\mathcal{M}(\Omega)$, la suite $(\frac{\partial u_k}{\partial n})_k$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\partial\Omega)$, par conséquent la convergence faible dans (1.17) devient forte. Autrement dit :

$$\frac{\partial u_k}{\partial n} \to \frac{\partial u}{\partial n} \text{ fortement dans } L^1(\partial\Omega),$$

avec l'estimation :

$$\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|\lambda\|_{\mathcal{M}(\Omega)}.$$

□

Remarque 1.2. *: Le terme* $\int_\Omega T_k(u)\,d\nu$ *dans (1.11) peut de ne pas avoir de sens lorsque u a une discontinuité, par contre on peut suivre la même stratégie utilisée dans la preuve de l'estimation (1.23) pour surmonter le même genre de difficulté.*

L'existence et l'unicité de solution de l'équation (1.1) est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.3. *Si* $\nu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ *et* $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$, *alors il existe une seule solution u de l'équation (1.1), en plus u vérifie l'estimation,*

$$\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}} + \|\nabla u\|_{M^{\frac{N}{N-1}}} \leq C(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}). \tag{1.18}$$

Avant de prouver cette proposition, on va annoncer le lemme suivant qui concerne l'approximation régulière d'une mesure. (voir [31], lemma 3.4).

Lemme 1.1. *Soient E un ouvert* $\mathbb{R}^m$ *et* $\mu \in \mathcal{M}(E)$ *, si on désigne par* (ρ_n) *une suite régularisante radiale, alors la suite* $(\rho_n * \mu) \subset C^\infty(\overline{E})$ *converge faiblement vers* μ, *en plus on a :*

$$\|\rho_n * \mu\|_{L^1(E)} \to \|\mu\|_{\mathcal{M}(E)}.$$

Preuve du lemme :

Rappelons que la convolution entre une fonction et une mesure est définie par

$$(\rho_n * \mu)(x) := \int_E \rho_n(x-y)\,d\mu(y).$$

Pour $\psi \in C_0(\overline{E})$, à partir du théorème de Fubini on a :

$$\int_E \psi(x)\,(\rho_n * \mu)(x)\;dx = \int_E \left(\int_E \rho_n(x-y)\psi(x)dx\right)d\mu(y) = \int_E \rho_n * \psi(y)d\mu(y).$$

La convergence uniforme de $(\rho_n * \psi)_n$ vers ψ dans E implique la convergence faible * de $(\rho_n * \mu)_n$ vers μ dans $\mathcal{M}(E)$.

On a :

$$\int_E |\rho_n * \mu(x)|dx \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(E)}.$$

Et d'après la semi-continuité inférieure de la norme :

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(E)} \leq \liminf \|\rho_n * \mu\|_{\mathcal{M}(E)}.$$

On conclut alors :

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(E)} \leq \liminf \|\rho_n * \mu\|_{L^1(E)} \leq \limsup \|\rho_n * \mu\|_{L^1(E)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(E)}.$$

□

Preuve de la Proposition 1.3 On commence par établir l'estimation a priori (1.18) dans le cas où μ et ν sont des fonctions régulières, puis on va terminer par la preuve de l'existence et de l'unicité.

Pour $k > 0$, on multiplie l'équation (1.1) par $T_k(u) := sign(u)\, \min\{k, |u|\}$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla T_k(u) \; + \int_\Omega T_k(u) u = \int_\Omega T_k(u) d\nu \; + \int_{\partial\Omega} T_k(u) d\mu.$$

Du fait que $T_k(u)\, u \geq 0$, on obtient,

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2 \leq kL \quad \forall k > 0, \tag{1.19}$$

et que,

$$\int_\Omega |T_k(u)|^2 \leq kL \quad \forall k > 0, \tag{1.20}$$

où $L := (\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \; + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)})$.
Ce qui entraine ([4] , lemma 4.1 et lemma 4.2) que :

$$|\nabla u| \in M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad u \in M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega).$$

Plus précisément, on a les estimations :

$$|\{|u| > k\}| \leq C L^{\frac{N}{N-2}}\, k^{-\frac{N}{N-2}} \qquad \forall k > 0,$$
$$|\{|\nabla u| > k\}| \leq C L^{\frac{N}{N-1}}\, k^{-\frac{N}{N-1}} \qquad \forall k > 0.$$

Tenant compte de l'équivalence (1.5),

$$C\, \|u\|^p_{M^p(\Omega)} \leq \sup_{s>0} s^p |\{|u| > s\}| \leq \|u\|^p_{M^p(\Omega)}, \tag{1.21}$$

on conclut donc qu'on a l'inégalité :

$$\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{M^{\frac{N}{N-1}}(\partial\Omega)} \leq C(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}). \tag{1.22}$$

Étape 2 :Existence et unicité

Si on considère le problème homogène ($\mu = 0, \nu = 0$), et on applique l'estimation (1.32) (qu'on démontrera indépendamment par la suite) pour $\xi = 1$, on obtient $\int_\Omega |u| \leq 0$, d'où $u = 0$, et l'unicité.

Soient $\nu_n := \rho_n * \nu$ et $\mu_n := \rho_n * \mu$, où ρ_n est le même noyau de convolution radial et régulier utilisé dans Lemme 1.1 . Les deux suites de fonctions $\{\nu_n\}_n$ et $\{\mu_n\}_n$ convergent étoile faiblement vers ν et μ dans $\mathcal{M}(\Omega)$, $\mathcal{M}(\partial\Omega)$ respectivement, et les deux suites sont bornées.

Soit $u_n = \mathbb{H}[\mu_n, \nu_n]$ la solution du problème (1.1) à données μ_n et ν_n. L'estimation a priori (1.22) montre que $(u_n), (\nabla u_n)$ sont bornées dans $M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega), M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$. Par conséquent, la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p < N/(N-1)$, la réflexivité de $W^{1,p}(\Omega)$ pour $1 < p < N/(N-1)$ assure l'existence de $u \in W^{1,p}(\Omega)$, telle que $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans chaque espace $W^{1,p}(\Omega)$ pour $1 \leq p < N/(N-1)$.

Pour une fonction test $\xi \in \mathcal{C}_\Omega$, lorsqu'on fait tendre n vers l'infini dans la formulation faible de l'équation en u_n on obtient,

$$(\forall \xi \in \mathcal{C}_\Omega) \quad \int_\Omega u\,(-\Delta\xi\, + \xi) = \int_\Omega \xi\, d\nu\, + \int_{\partial\Omega} \xi d\mu.$$

L'existence est donc montrée.

Étape 3 : l'estimation (1.18) dans le cas général

Pour $k > 0$ fixé, l'inégalité (1.19) affirme que $(|\nabla T_k(u_n)|)_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, et l'inégalité (1.20) permet de déduire que $(T_k(u_n))_n$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. La réflexivité de l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ implique la convergence faible de la suite bornée $(T_k(u_n))_n$ dans $W^{1,2}(\Omega)$.

Rappelons que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < N/(N-1))$, et grâce au Théorème de compacité de Rellich-Kondrachov, $(u_n)_n$ converge fortement vers u dans $L^q(\Omega)$ $(q < N/(N-2))$, ainsi la suite u_n converge presque partout vers u. D'où :

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \;\text{ presque partout dans }\; \Omega.$$

On conclut que $T_k(u)$ est la limite faible de $(T_k(u_n))_n$. Prenons la limite inférieure dans (1.19), et à partir de la semi-continuité inférieure de la norme,

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 \leq k(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}\, + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}). \tag{1.23}$$

Cela est valide pour tout $k > 0$, en procédant par la même démarche utilisée dans l'étape 1 de la preuve, on déduit :

$$\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{M^{\frac{N}{N-1}}(\partial\Omega)} \leq C(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}). \tag{1.24}$$

■

Classiquement, à partir du résultat précédent la trace sur le bord de la solution u appartient à $L^p(\partial\Omega)$ pour tout $p < N/(N-1)$. Une assertion plus fine que celle ci est possible, elle est donnée par la proposition suivante, dont l'avantage principale est de permettre d'avoir un résultat de compacité de type Rellich-Kondrachov sur le bord.

Proposition 1.4. *Soient $\nu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$. La solution $u = \mathbb{H}[\mu,\nu]$ du (1.1) a une trace sur le bord qui satisfait :*

(i) si $N \geq 3$,

$$\|u_{|\partial\Omega}\|_{M^{\frac{N-1}{N-2}}(\partial\Omega)} \leq C(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}), \tag{1.25}$$

(ii) si $N = 2$, pour tout $p < \infty$

$$\|u_{|\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}). \tag{1.26}$$

Preuve :

D'après la Proposition 1.3 et si on utilise les notations des espaces de Lorentz, $u \in L_\infty^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$ et $\nabla u \in L_\infty^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$, donc u appartient à l'espace de Besov $B_\infty^{1,N/(N-1)}(\Omega)$. En utilisant le Théorème de trace dans les espaces de Besov (voir [35]) :

$$u\mid_{\partial\Omega}\in B_{\infty}^{1-(N-1)/N,N/(N-1)}(\partial\Omega),$$

avec injection continue, c'est à dire,

$$\|u\mid_{\partial\Omega}\|_{B_{\infty}^{1/N,N/(N-1)}(\partial\Omega)}\leq C\|u\|_{B_{\infty}^{1,N/(N-1)}(\Omega)}.$$

L'espace des fonctions mesurables tel que $\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)}+\|\nabla u\|_{M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)}<\infty$ s'injecte continûment dans l'espace de Besov $B_{\infty}^{1,N/(N-1)}(\Omega)$, donc on a

$$\|u\|_{B_{\infty}^{1,N/(N-1)}(\Omega)}\leq C\,(\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)}+\|\nabla u\|_{M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)}).$$

Par conséquent :

$$\|u\mid_{\partial\Omega}\|_{B_{\infty}^{1/N,N/(N-1)}(\partial\Omega)}\leq C\,(\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)}+\|\nabla u\|_{M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)}). \tag{1.27}$$

Et par (1.18), il résulte :

$$\|u\mid_{\partial\Omega}\|_{B_{\infty}^{1/N,N/(N-1)}(\partial\Omega)}\leq C\,\left(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}+\|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}\right).$$

Puisque $\dfrac{1}{q}=\dfrac{N}{N-1}-\dfrac{1}{N(N-1)}$, pour $q=\dfrac{N-1}{N-2}$, alors l'espace $B_{\infty}^{1/N,N/(N-1)}(\partial\Omega)$ s'injecte continûment dans X avec $X:=M^{(N-1)/(N-2)}(\partial\Omega)$ pour $N\geq 3$, et $X:=L^p(\partial\Omega)$ pour tout p fini lorsque $N=2$, donc on a

$$\|u\mid_{\partial\Omega}\|_X\leq C\,\left(\|\nu\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}+\|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}\right).$$

■

Remarque 1.3. *:*

1) *La relation (1.27) montre la* ***compacité*** *de l'opérateur trace sur $\partial\Omega$. Il faut retenir de cela le fait qu'à chaque fois qu'on a une suite de solutions (u_n) de (1.1) telle que :*

$$\|u_n\|_{M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)}+\|\nabla u_n\|_{M^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)}<C<\infty,$$

alors la trace au bord de u_n converge (à une sous suite) presque partout et fortement dans $L^p(\partial\Omega)$ avec $p<(N-1)/(N-2)$ lorsque $N\geq 3$, et p arbitraire lorsque $N=2$.

Cela, combiné avec la compacité de u_n sur Ω, nous permettra de passer simultanément à la limite de u_n dans Ω et sur $\partial\Omega$.

2) *Comme conséquence de Proposition 1.3 et Proposition 1.4, la solution u du problème (1.1) appartient aux espaces de Sobolev $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1\leq q<N/(N-1)$. On pourra se demander si la régularité de u exprimée en termes d'espaces de Marcinkiewicz est la meilleur possible ? La réponse est positive, en effet, si la solution u appartient à l'espace de Sobolev $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q:=N/(N-1)$, alors considérons le problème*

$$\begin{cases} -\Delta v+v=0 \quad \textit{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n}+|v|^{q-1}\,v=\gamma\,\delta_0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.28}$$

où Ω est un domaine borné régulier dont le bord contient le point 0, $\gamma > 0$. Si on considère le problème linéaire

$$\begin{cases} -\Delta w + w = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = \gamma\, \delta_0 \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.29}$$

alors, d'après la régularité présumé,

$$w \in L^{\frac{N-1}{N-2}}(\partial\Omega).$$

Comme on verra au Théorème 2.4, ceci entraîne que le problème (1.28) admet une solution, or d'après le Corollaire 3.2, ceci est impossible.

Une autre alternative de chercher la régularité optimale consiste à exprimer les solutions de (1.1) en termes de la solution fondamentale qu'on verra dans le prochain paragraphe.

1.2.4 La solution fondamentale

Définition 1.4. *: Pour $N \geq 2$, soit u la solution du problème :*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \nu \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \mu \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Multiplions l'équation précédente par une fonction test régulière $v(y)$ qui vérifie $\dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega u\,(-\Delta v + v)\,dx = \int_\Omega v\,d\nu + \int_{\partial\Omega} v\,d\mu.$$

Si en plus $v := v(x,y)$ vérifie,

$$\begin{cases} -\Delta v(x,\cdot) + v(x,\cdot) = \delta_x \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n}(x,\cdot) = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors, pour $x \in \Omega$, la fonction u s'écrit,

$$u(x) = \int_\Omega v(x,y)d\nu(y) + \int_{\partial\Omega} v(x,y)d\mu(y). \tag{1.30}$$

La fonction $v(x,y)$ est appelé la solution fondamentale du problème (1.1).

Remarque 1.4. *: Lorsque la dimension $N = 2$, le résultat de la Proposition 1.3 reste valide avec une petite modification, à savoir $u \in L^p(\Omega)$ $\forall p < \infty$ et $\nabla u \in M^2(\Omega)$, mais la preuve rédigée pour la Proposition 1.3 n'est pas complètement rigoureuse dans ce cas. Une autre alternative consiste à utiliser la formule de représentation (1.30) et montrer que la solution u du (1.1) satisfait :*

$$\|\nabla u\|_{M^2(\Omega)} \leq C\,(\|\nu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}). \tag{1.31}$$

1.3 Principe de comparaison

Afin d'établir un principe de comparaison de solutions de (1.1), nous allons établir l'inégalité suivante analogue à celle de Brezis dans un travail non publié (voir [37], Theorem 2.4).

Lemme 1.2. *Soient $\nu \in L^1(\Omega)$, $\mu \in L^1(\partial\Omega)$ et soit $u \in L^1(\Omega)$ la solution du problème (1.1). Alors on a :*

$$\int_\Omega |u|\,(-\Delta\xi + \xi)\,dx \leq \int_\Omega \xi\,\nu\,sign(u)\,dx + \int_{\partial\Omega} \xi\,\mu\,sign(u)\,dS, \tag{1.32}$$

et

$$\int_\Omega u_+\,(-\Delta\xi + \xi)\,dx \leq \int_\Omega \xi\,\nu\,sign_+(u)\,dx + \int_{\partial\Omega} \xi\,\mu\,sign_+(u)\,dS, \tag{1.33}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{C}_\Omega, \xi \geq 0$.

Preuve :

Soit $(\gamma_k)_k$ une suite de fonctions positives régulières, telle que :

(a) $\gamma_k(s) = 0$ pour $s \leq 0$,
(b) $|\gamma_k| \leq 1$,
(c) pour k fixé, la fonction γ_k est croissante sur $\mathbb{R}$,
(d) La suite $(\gamma_k(.))_k$ converge ponctuellement sauf en 0 vers $sign_+(s)$.

On peut donner l'exemple suivant d'une telle suite de fonctions,

$$\gamma_k(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ k^2\,r^2 & \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{2k}, \\ 1 - \frac{k^2}{3}(r - \frac{2}{k})^2 & \text{si } \frac{1}{2k} \leq r \leq \frac{2}{k}, \\ 1 & \text{si } r \geq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

On multiplie l'équation (1.1) par la fonction test $\gamma_k(u)\xi$, où ξ est un élément positif de $\mathcal{C}_\Omega$. À noter qu'on a le droit d'utiliser une telle fonction test puisque γ_k est bornée.

Donc,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(\gamma_k(u)\xi) + \int_\Omega u\gamma_k(u)\xi = \int_\Omega \gamma_k(u)\xi d\nu + \int_{\partial\Omega} \gamma_k(u)\xi d\mu.$$

Et puisque $\gamma_k^{'}(s) \geq 0\ \forall s$, alors :

$$\int_\Omega \gamma_k(u)\nabla u\nabla\xi + \int_\Omega u\gamma_k(u)\xi \leq \int_\Omega \gamma_k(u)\xi d\nu + \int_{\partial\Omega} \gamma_k(u)\xi d\mu.$$

On définit

$$j_k^1(r) = \int_0^r \gamma_k(s)ds, \qquad j_k^2(r) = r\,\gamma_k(r).$$

Utilisons ces nouvelles notations dans l'inégalité précédente,

$$\int_\Omega \nabla j_k^1(u)\,\nabla\xi + \int_\Omega j_k^2(u)\,\xi \leq \int_\Omega \gamma_k(u)\xi d\nu + \int_{\partial\Omega} \gamma_k(u)\xi d\mu.$$

Par une intégration par partie,

$$-\int_\Omega j_k^1(u)\,\Delta\xi + \int_\Omega j_k^2(u)\xi \leq \int_\Omega \gamma_k(u)\xi d\nu + \int_{\partial\Omega} \gamma_k(u)\xi d\mu. \tag{1.34}$$

On voit clairement que,

$$0 \leq j_k^1(u) \leq j_k^2(u) \leq sign_+(u)\, u \in L^1(\Omega),$$

les suites de fonctions $(j_k^1(u))_k$ et $(j_k^2(u))_k$ converge ponctuellement sauf en 0 vers u_+ .

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $(j_k^1(u))_k$ et $(j_k^2(u))_k$ convergent fortement dans $L^1(\Omega)$ vers $u_+ := \sup(u, 0)$.
En faisant tendre k vers l'infini dans (1.34), on obtient, pour $\xi \in \mathcal{C}_\Omega \ \ \xi \geq 0$:

$$\int_\Omega u_+ \, (-\Delta\xi + \xi)\, dx \leq \int_\Omega \xi\, \nu\, sign_+(u)\, dx + \int_{\partial\Omega} \xi\, \mu\, sign_+(u)\, dS. \tag{1.35}$$

L'estimation (1.33) vient d'être montrer.

La fonction $v := -u$ vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta v + v = -\nu \ \text{ dans } \ \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = -\mu \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Réécrivons l'inégalité (1.35) pour v :

$$\int_\Omega v_+ \, (-\Delta\xi + \xi)\, dx \leq -\int_\Omega \xi\, \nu\, sign_+(v)\, dx - \int_{\partial\Omega} \xi\, \mu\, sign_+(v)\, dS,$$

pour tout $\xi \in \mathcal{C}_\Omega, \xi \geq 0$.

Remarquons que $v_+ = u_-$ et $sign_+(v) = sign_-(u)$, où $u_- := \sup(-u, 0)$. Par conséquent la dernière inégalité prend la forme :

$$\int_\Omega u_- \, (-\Delta\xi + \xi)\, dx \leq -\int_\Omega \xi\, \nu\, sign_-(u)\, dx - \int_{\partial\Omega} \xi\, \mu\, sign_-(u)\, dS. \tag{1.36}$$

Rappelons que $|u| = u_+ + u_-$ et $sign(u) = sign_+(u) - sign_-(u)$, en ajoutant (1.35) à (1.36) , on obtient l'inégalité suivante pour $|u|$:

$$\int_\Omega |u|\, (-\Delta\xi + \xi)\, dx \leq \int_\Omega \xi\, \nu\, sign(u)\, dx + \int_{\partial\Omega} \xi\, \mu\, sign(u)\, dS,$$

pour tout $\xi \in \mathcal{C}_\Omega, \xi \geq 0$.

$\blacksquare$

Remarque 1.5. *Dans le cas générale où μ et ν sont des mesures, les conclusions du lemme précédent restent encore valide, à savoir que les inégalités seront remplacées par les parties régulières des mesures en question.*

À partir de (1.33) , si ν est une mesure négative dans Ω et si μ est une mesure négative sur $\partial\Omega$, en prenant $\xi = 1$, on déduit que : $\displaystyle\int_\Omega u_+ dx \leq 0$, donc $u \leq 0$ dans Ω, et si $\mathbb{L} := -\Delta + I_d$, on a $\mathbb{L}u \leq 0$, on conclut grâce au théorème de Herglotz-Doob que $u\lfloor_{\partial\Omega}$ est une fonction négative sur $\partial\Omega$ (voir [29], Theorem 1.4.1).

Dans le cas où $\nu \geq 0$, et $\mu \geq 0$, par un raisonnement analogue en utilisant l'inégalité (1.36) on conclut que $u \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$.

On a donc démontré le principe de comparaison suivant pour le problème linéaire (1.1) ,

Corollaire 1.1. *Soient $\nu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$ et u la solution du problème (1.1). On a les conclusions suivantes :*

(i) si $\nu \leq 0$ *et* $\mu \leq 0$ *alors* $u \leq 0$,
(ii) si $\nu \geq 0$ *et* $\mu \geq 0$ *alors* $u \geq 0$.

Soit maintenant u une solution du problème suivant à données mesures :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \nu \ \text{ dans } \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = \mu \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.37}$$

avec g est une fonction continue qui vérifie la condition du signe $sg(s) \geq 0 \ \ \forall s$.

Par (1.33), pour tout $\xi \in \mathcal{C}_\Omega, \ \ \xi \geq 0$:

$$\int_\Omega u_+(-\Delta\xi + \xi)\, dx + \int_{\partial\Omega} \xi\, sign_+(u) g(u) dS \leq \int_\Omega \xi\, sign_+(u)\, \nu + \int_{\partial\Omega} \xi\, sign_+(u)\, \mu.$$

Le terme $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \xi sign_+(u) g(u) dS$ est toujours positif, donc l'inégalité précédente est réduite à :

$$\int_\Omega u_+(-\Delta\xi + \xi) dx \leq \int_\Omega \xi\, sign_+(u)\, d\nu + \int_{\partial\Omega} \xi\, sign_+(u)\, d\mu. \tag{1.38}$$

On voit clairement que le rôle joué par la condition du signe est de permettre d'avoir le même principe de comparaison pour le problème linéaire (1.1) comme pour le problème non linéaire (1.37). Ce qu'on énonce par le corollaire suivant.

Corollaire 1.2. *soient* $\nu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$ *. Si* u *est une solution du problème (1.37), alors :*
(i) si $\nu \leq 0$ *et* $\mu \leq 0$ *alors* $u \leq 0$,
(ii) si $\nu \geq 0$ *et* $\mu \geq 0$ *alors* $u \geq 0$.

Preuve : similaire à la preuve du Corollaire 1.1.

Remarque 1.6. *Par la même méthode, on peut démontrer que l'inégalité (1.38) demeure encore valable, pour le problème suivant,*

$$\begin{cases} -\Delta u + h(u) = \nu \ \ \textit{dans} \ \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = \mu \ \ \textit{sur} \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

où g *et* h *sont des fonctions continues et vérifient la condition du signe.*

Ainsi, la conclusion du Corollaire 1.2 reste valable pour ce problème.

■

On termine ce chapitre par les deux conclusions suivantes, qu'on va les utiliser systématiquement dans la suite.

Corollaire 1.3. *Soient* μ, ν *deux mesures dans* $\mathcal{M}(\partial\Omega)$ *tel que* $\mu \leq \nu$*. Et soient* u, v *respectivement les solutions des deux problèmes suivants :*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \ \ \textit{dans} \ \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = \mu \ \ \textit{sur} \ \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.39}$$

$$\begin{cases} -\Delta v + v = 0 & dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} + h(v) = \nu & sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.40}$$

où g et h sont deux fonctions continues .

Alors, dans les deux cas suivants, on a : $u \leq v$ dans $\overline{\Omega}$:

<u>Cas 1</u> : $h = 0$, $v \geq 0$ et $g(s) \geq 0$ $(\forall s \geq 0)$.

<u>Cas 2</u> : $h(s) \leq g(s)$ $(\forall s \in \mathbb{R})$, et l'une des fonctions $g(\cdot)$ ou $h(\cdot)$ est croissante .

Preuve :
Prenons la différence entre les deux équations vérifiées par u et v respectivement, et on note $\omega = u - v$, alors ω est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta\omega + \omega = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial n} + [g(u) - h(v)] = \mu - \nu \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Par (1.33), on a pour tout $\xi \in \mathcal{C}_\Omega$, $\xi \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (u-v)_+ (-\Delta\xi + \xi)\, dx + \int_{\partial\Omega} \xi sign_+(u-v)[g(u) - h(v)]\, dS &\leq \int_{\partial\Omega} \xi \; sign_+(u-v) \; d(\mu - \nu), \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{1.41}$$

<u>*Cas 1*</u> : $h = 0$, $v \geq 0$ et $g(s) \geq 0$ $(\forall s \geq 0)$

La solution v est positive, et par la condition sur g, le terme

$$\int_{\partial\Omega} \xi \, sign_+(u-v)\, [g(u) - h(v)]\, dS,$$

est positif, par conséquent

$$\int_\Omega (u-v)_+ (-\Delta\xi + \xi)\, dx \leq 0 \quad (\forall \xi \geq 0).$$

D'où $u \leq v$ dans Ω , et par l'application à nouveau du théorème de Herglotz-Doob on conclut que : $u \leq v$ dans $\overline{\Omega}$.

<u>*Cas 2*</u> : $h(s) \leq g(s)$ $(\forall s \in \mathbb{R})$ et soit $g(\cdot)$ ou $h(\cdot)$ est croissante.

Si $g(\cdot)$ est croissante, alors pour $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} s \geq t \Rightarrow g(s) \geq g(t) \geq h(t), \\ \Rightarrow [g(s) - h(t)] \geq 0. \end{aligned}$$

Et si $h(\cdot)$ est croissante, alors on a

$$\begin{aligned} s \geq t \Rightarrow g(s) \geq h(s) \geq h(t), \\ \Rightarrow [g(s) - h(t)] \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans les deux cas, on a

$$\int_{\partial\Omega} \xi \, sign_+(u-v)\, [g(u) - h(v)]\, dS \geq 0 \quad (\forall \xi \geq 0).$$

Ce qui entraîne, comme dans le *Cas 1*, $u \leq v$ dans $\overline{\Omega}$.

□

La contrepartie du Corollaire 1.3 est donnée par,

Corollaire 1.4. *Soient μ, m deux mesures dans $\mathcal{M}(\partial\Omega)$ tel que $m \leq \mu$. Et soient u, w respectivement les solutions des deux problèmes suivants :*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = \mu \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.42}$$

$$\begin{cases} -\Delta w + w = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} + f(w) = m \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.43}$$

où g et f sont deux fonctions continues .

Alors, dans les deux cas suivants, on a : $w \leq u$ dans $\overline{\Omega}$:

<u>Cas 1</u> : $f = 0$, $w \leq 0$ et $g(s) \leq 0$ $(\forall s \leq 0)$.

<u>Cas 2</u> : $g(s) \leq f(s)$ $(\forall s \in \mathbb{R})$, et l'une des fonctions $g(\cdot)$ ou $f(\cdot)$ est croissante .

Preuve :

Considérer l'équation vérifiée par $u_1 := -u$ et $w_1 = -w$ et appliquer le résultat du Corollaire 1.3.

Chapitre 2

Problèmes non linéaires au bord

2.1 Introduction

À partir de ce chapitre jusqu'à la fin, ν est égale à 0.

On a vu lors de l'étude du problème linéaire (1.1) qu'il n'y a pas de grandes différences lorsque la donnée μ est une mesure sur $\partial\Omega$ ou bien une fonction de $L^1(\partial\Omega)$; les mêmes résultats d'existence et de régularité, les mêmes estimations sont valides dans les deux cas. On va voir dans ce chapitre que ce n'est pas le cas lorsque le problème considéré contient une non linéarité sur $\partial\Omega$. Plus précisément, on verra que le problème lorsqu'on considère la donnée μ dans $L^1(\partial\Omega)$ admet toujours une solution, tandis que l'existence de solutions lorsque la donnée μ appartient à $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$ dépend de la non linéarité g et de la mesure μ .

Dans ce chapitre, le problème principal étudié est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \ \text{ dans } \ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = \mu \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $g(.)$ une fonction croissante qui vérifie $s \cdot g(s) \geq 0$ et μ est une mesure bornée sur $\partial\Omega$.

Le sens de la solution est,

$$\begin{aligned} &1) \ \ u \in L^1(\Omega). \\ &2) \ \ g(u) \in L^1(\partial\Omega). \\ &3) \ \ (\forall \xi \in \mathcal{C}_\Omega) \qquad \int_\Omega u\,(-\Delta\xi + \xi)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(u)\xi\,dS = \int_{\partial\Omega} \xi d\mu. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il est important de noter que si $u \in L^1(\Omega)$ une solution de $-\Delta u + u = 0$, alors u admet une trace sur le bord qui appartient à $L^1(\partial\Omega)$, ce qui permet de donner un sens à $g(u)$ au bord, au moins ponctuellement presque partout.

2.2 Problème non linéaire à donnée L^1

On commence la discussion de solution de problème (2.1) dans un cadre variationnel.
On considère le cadre le plus large possible $\mu \in L^\infty(\Omega)$.

On définit formellement la fonctionnelle d'énergie qui correspond au problème (2.1) par :

$$I(u) := \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2\Big) + \int_{\partial\Omega} G(u)\,dS - \int_{\partial\Omega} \mu\, u\,dS, \tag{2.3}$$

où : $G(u) := \int_0^u g(t)\,dt$.

La fonctionnelle I est définie sur le sous espace des fonctions $u \in W^{1,2}(\Omega)$ telles que

$$\int_{\partial\Omega} G(u)\,dS < \infty. \tag{2.4}$$

À noter que dans la fonctionnelle I, le seul terme qui est susceptible de ne pas être fini pour $u \in W^{1,2}(\Omega)$ est $\int_{\partial\Omega} G(u)\,dS$. On permet à I de prendre la valeur $+\infty$ sur $W^{1,2}(\Omega)$. On a affaire à chercher un minimum de $I : W^{1,2}(\Omega) \to (-\infty, +\infty]$, l'existence d'un tel minimum est donné par le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Il existe une fonction v dans $W^{1,2}(\Omega)$ tel que :*

$$I(v) = \inf\{\ I(u)\ /u \in W^{1,2}(\Omega)\ \}.$$

Preuve : Remarquons d'abord que si $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ alors $u_{|\partial\Omega} = 0$, par conséquent $G(u) = 0$ ce qui entraîne que I est propre (non identiquement égale à $+\infty$) .

La croissance de g entraîne que la fonctionnelle I est convexe.

Soit $\alpha := \inf\{I(u) : u \in W^{1,2}(\Omega)\}$. Il existe donc une suite $\{u_n\}_n \subset W^{1,2}(\Omega)$ qui minimise I.

On a les estimations suivantes sur I,

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - \|\mu\|_{L^2(\partial\Omega)}\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \quad (G \geq 0 \text{ et inégalité de Hölder}),\\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} - c\|\mu\|_{L^2(\partial\Omega)}\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \quad (\text{théorème de trace}),\\ &\geq \frac{1}{2}X^2 - c\|\mu\|_{L^2(\partial\Omega)}\,X \quad (X := \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité montre que la fonctionnelle I est coercive ($I \to +\infty$ si $X \to \infty$), donc en particulier la suite minimisante ne peut être que bornée dans $W^{1,2}(\Omega)$. Par la suite, la réflexivité de $W^{1,2}(\Omega)$ entraîne l'existence d'un élément v tel que $\{u_n\}_n$ converge faiblement vers v dans $W^{1,2}(\Omega)$, et du théorème de compacité de Rellich Kondrachov, la suite $\{u_n\}$ converge vers v ponctuellement presque partout et fortement dans $L^q(\Omega)\ \ \forall q < 2^*$. Aussi, on déduit de la continuité de l'opérateur trace au bord, que u_n converge fortement vers v dans $L^2(\partial\Omega)$ et ponctuellement presque partout .

En utilisant la semi continuité faible de la norme et le lemme de Fatou, on déduit :

$$\begin{gathered} \int_\Omega (|\nabla v|^2\ +\ v^2\,) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (|\nabla u_n|^2\ +\ u_n^2\,),\\ \int_{\partial\Omega} G(v)\,dS\ \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} G(u_n)\,dS,\\ \int_{\partial\Omega} \mu\,u_n\,dS \to \int_{\partial\Omega} \mu\,v\,dS. \end{gathered}$$

Finalement, on conclut :

$$I(v) = \alpha := \inf I(u) \quad \text{pour} \quad u \in W^{1,2}(\Omega).$$

$\blacksquare$

La difficulté dans la recherche de l'équation d'Euler-Lagrange associée au fonctionnelle I, vient du terme G, dont ce n'est pas évident de différentier le terme G au sens de Fréchet ou au sens de Gâteaux, puisque le terme $\int_{\partial\Omega} G(v+t\,h)\,dS$ peut être infini pour t suffisamment proche de 0. On suivra une approche spécifique développée dans ([31] , Proposition 2.3) qui consiste à tronquer la non linéarité g dans la définition d'énergie (2.3), si on note I_c la fonctionnelle d'énergie associée à cette troncature, alors l'équation d'Euler-Lagrange dans ce cas admet une solution, l'étape suivante consiste à montrer que la non linéarité g_c coïncide avec celle de g dans les valeurs de la solution u_c du problème I_c, autrement dit

$$g_c(u_c) = g(u_c),$$

où u_c est la solution qui correspond à l'énergie I_c.

Lemme 2.2. *Soient g une fonction continue croissante qui vérifie la condition du signe $(s \cdot g(s) \geq 0)$ et $k \in \mathbb{R}$. Si $\mu \in L^\infty(\Omega)$, et si v est un minimum du fonctionnelle I sur $W^{1,2}(\Omega)$, alors,*

(i) si pour tout $t \in [k, \infty)$, $g(t) \geq \|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, alors $v \leq k$ sur $\partial\Omega$,

(ii) si pour tout $t \in (-\infty, k]$, $g(t) \leq -\|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, alors $v \geq k$ sur $\partial\Omega$.

Preuve : On va prouver l'assertion (ii), la preuve de (i) est similaire.

Soient v le minimum du fonctionnelle I, k un nombre négative, on définit la fonction v_k par $v_k := max\{v, k\}$, On a :

$$\nabla v_k = \begin{cases} 0 & \text{dans } v < k, \\ \nabla v & \text{dans } v \geq k. \end{cases}$$

Supposons que l'ensemble $\{v < k\}$ a une mesure strictement positive, et que pour tout $t \leq k$, $g(t) \leq -\|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$.

On a donc,

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^2 < \int_\Omega |\nabla v|^2,$$

(l'inégalité est stricte puisque $|\{v < k\}| > 0$)

et,

$$\begin{aligned} \int_\Omega v^2 &= \int_\Omega v_k^2 + \int_{\{v<k\}} (v^2 - k^2), \\ &> \int_\Omega v_k^2. \end{aligned}$$

En plus,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} G(v_k) &= \int_{\partial\Omega} G(v) - \int_{\partial\Omega} [G(v) - G(v_k)]\,dS, \\ &= \int_{\partial\Omega} G(v) - \int_{\partial\Omega\cap\{v<k\}} [G(v) - G(v_k)]\,dS. \end{aligned}$$

Pour $s < k$,

$$G(s) - G(k) = \int_k^s g(t)\,dt \geq (s-k) \sup_{t\in(-\infty,k)} g(t),$$

d'où :

$$\int_{\partial\Omega} G(v_k) \leq \int_{\partial\Omega} G(v) - \sup_{t\in(-\infty,k)} g(t) \int_{\partial\Omega\cap\{v<k\}} (v-k)\,dS.$$

Enfin,

$$\int_{\partial\Omega} v_k \, \mu = \int_{\partial\Omega} v\mu \; + \; \int_{\partial\Omega \cap \{v<k\}} (k-v)\,\mu.$$

Rassemblons les termes qui constituent l'énergie de v_k et v ,

$$I(v_k) < I(v) - \int_{\partial\Omega\cap\{v<k\}} \big(\sup_{t\in(-\infty,k)} g(t) + \mu\big)\,(v-k)\,dS.$$

Ce qui entraîne que $I(v_k) < I(v)$ qui est impossible, par conséquent $v \geq k$ presque partout.

La preuve de l'assertion (ii) est achevée.

□

La solution de l'équation (2.1) lorsque $\mu \in L^\infty(\partial\Omega)$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Soient $\mu \in L^\infty(\partial\Omega)$, g une non linéarité croissante qui vérifie $sg(s) \geq 0$, alors l'équation d'Euler-Lagrange associée au fonctionnelle I admet une solution $v \in W^{1,2}(\Omega)$ qui vérifie :*

$$\|g(v)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

Preuve : Si $(\forall t \in \mathbb{R}) \;\; |g(t)| < \|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, alors l'équation d'Euler-Lagrange associée à I admet une solution.

Supposons que : $\forall t \;\; g(t) < \|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ et qu'il existe $k<0$ tel que : $g(k) = -\|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$.

Soit g_k la fonction définie par :

$$g_k(t) = \begin{cases} g(k) & \text{si } t<k, \\ g(t) & \text{si } t \geq k. \end{cases}$$

La fonction g_k est bornée, soit I_k la fonctionnelle d'énergie définie par :

$$I_k(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 \; + \; u^2) \; + \; \int_{\partial\Omega} G_k(u)\,dS - \int_\Omega \mu\, u\, dS,$$

où $G_k(t) := \displaystyle\int_0^t g_k(s)\,ds$.

Le problème de minimisation associé à I_k admet une solution $v \in W^{1,2}(\Omega)$, et puisque g_k est bornée, la fonction v vérifie l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\int_\Omega (\nabla v \nabla \xi \; + \; v\xi) \; + \; \int_{\partial\Omega} (g_k(v)\xi - \mu\,\xi)\,dS = 0 \;\; (\forall \xi \in W^{1,2}(\Omega)).$$

D'après le Lemme 2.2 partie (ii), $v \geq k$ sur $\partial\Omega$, d'où $g_k(v) = g(v)$, donc v est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à I, et classiquement par intégration par partie, v est solution du (2.1).

Lorsque g n'a ni borne inférieure ni borne supérieure, la même preuve est valide si on redéfinit la fonction g_k comme suite :

$$g_k(t) = \begin{cases} g(k_1) & \text{si } t < k_1, \\ g(t) & \text{si } k_1 \leq t \leq k_2, \\ g(k_2) & \text{si } t > k_2, \end{cases}$$

avec $g(k_1) = -\|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ et $g(k_2) = \|\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$.

Le cas où g est bornée inférieurement est similaire (voir [31] , proof of Proposition 2.3).

■

La proposition suivante est le résultat principal de cette section.

Proposition 2.2. *Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, croissante et qui satisfait la condition du signe $s \cdot g(s) \geq 0$, et soit μ une fonction intégrable sur $\partial\Omega$. Alors il existe une solution unique u du problème (2.1), en plus cette solution vérifie :*

$$\int_{\Omega} |u| dx + \int_{\partial\Omega} |g(u)| \, dS \leq \int_{\partial\Omega} |\mu| \, dS. \tag{2.5}$$

Preuve : Soit $\mu_k = sign(\mu) \min\{k, |\mu|\}$, la suite $(\mu_k)_k$ appartient à $L^{\infty}(\partial\Omega)$, en plus $(\mu_k)_k$ converge fortement vers μ dans $L^1(\partial\Omega)$.

Soit u_k la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u_k + u_k = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial n} + g(u_k) = \mu_k \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.6}$$

L'existence d'une telle solution résulte de la Proposition 2.1, la solution $u_k \in L^1(\Omega)$ satisfait,

$$\int_{\Omega} u_k(-\Delta\xi + \xi) + \int_{\partial\Omega} g(u_k)\xi \, dS = \int_{\partial\Omega} \xi\mu_k \, dS \qquad (\forall \xi \in \mathcal{C}_{\Omega}). \tag{2.7}$$

Pour deux indices k et l arbitraire, faisons la différence entre les deux équations vérifient par u_k et u_l respectivement, la fonction $[u_k - u_l]$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta[u_k - u_l] + [u_k - u_l] = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial[u_k - u_l]}{\partial n} + [g(u_k) - g(u_l)] = [\mu_k - \mu_l] \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Utilisons l'inégalité (1.32) en remplaçant ξ par 1,

$$\int_{\Omega} |u_k - u_l| \, dx + \int_{\partial\Omega} |g(u_k) - g(u_l)| \, dS \leq \int_{\partial\Omega} |\mu_k - \mu_l| \, dS. \tag{2.8}$$

La convergence forte de $(\mu_k)_k$ vers μ entraîne la convergence forte dans $L^1(\Omega)$ de $(u_k)_k$ vers une limite qu'on note u, et celle de $(g(u_k))_k$ vers un élément de $L^1(\partial\Omega)$ qui sera nécessairement sa limite ponctuelle $g(u)$.

Lorsque k tend vers l'infini, la limite de la formulation faible de la solution u_k de (2.7) est,

$$\int_{\Omega} u(-\Delta\xi + \xi) + \int_{\partial\Omega} g(u)\xi \, dS = \int_{\partial\Omega} \xi\mu \, dS \qquad (\forall \xi \in \mathcal{C}_{\Omega}).$$

L'existence vient d'être établi.

Pour l'unicité, il suffit de prendre $\mu_k = \mu_l = \mu$ dans le formalisme précédent, et ainsi remplacer $[\mu_k - \mu_l]$ par 0 dans (2.8).

L'inégalité (2.5) n'est rien d'autre que (1.32), lorsque, $\xi = 1$ et la donnée au bord considérée est $[\mu - g(u)]$.

■

Problèmes avec données mesures

Pour voir la différence entre le problème non linéaire à donnée $L^1(\partial\Omega)$ et celui à donnée $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$, prenons par exemple l'approche utilisée dans la démonstration du Proposition 2.2, et essayons de l'appliquer au cas de mesures. Lorsque $\mu \in L^1(\partial\Omega)$, on peut toujours l'approximer **fortement** par une suite $(\mu_k)_k \subset L^\infty(\partial\Omega)$, et puisque l'espace $L^1(\partial\Omega)$ est un sous espace fermé de $\mathcal{M}(\partial\Omega)$, dans le cas où $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$ tout ce qu'on peut avoir comme approximation de μ par des fonctions intégrables ne peut avoir lieu que par une approximation **faible**. L'information clé dans la preuve précédente est l'inégalité (2.8), la même inégalité est valable au cas de mesure mais tout ce qu'on peut d'en déduire est le fait que $g(u_k)$ est bornée dans L^1. Dans ce cas si on combine cette estimation avec celle sur u_n dans l'estimation (1.18), on déduit que la suite $\{u_k\}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p < N/(N-1)$), et comme nous avons déjà vu sur la compacité, cela implique en particulier que u_k converge dans $L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ vers une fonction u, et par conséquent les termes linéaires dans la formulation faible de la solution u_k convergent vers les termes linéaires de la formulation faible de solution u. D'autre part $g(u_k)$ converge ponctuellement presque partout vers $g(u)$, mais le terme non linéaire de la formulation faible correspondant à $g(u_k)$ **ne converge pas nécessairement** vers un terme exprimé en $g(u)$. En effet, tout ce qu'on peut dire c'est la convergence étoile faible de $g(u_k)$ vers une mesure sur le bord. Ainsi le problème d'obtenir une solution en procédant par cette approche est résumé maintenant à la convergence faible de $g(u_k)$ vers sa limite ponctuelle $g(u)$.

Afin d'obtenir une solution lorsque $\mu \in \mathcal{M}_b(\partial\Omega)$, il existe deux types d'approches pour assurer la convergence faible (voir forte) de $g(u_k)$ vers $g(u)$. La première est de poser des conditions sur la mesure donnée, la deuxième consiste à supposer des conditions sur la non linéarité g .

On verra dans la suite quelques résultats dans cette direction.

2.3 Non linéarité sous critique en dimension $N \geq 3$

Définition 2.1. *Supposons $N \geq 3$. Soit g une fonction continue qui satisfait la condition du signe ($s\,g(s) \geq 0$). On dit que g satisfait la condition de singularité faible au bord si*

$$\int_1^\infty (g(s) + |g(-s)|)s^{-(2N-3)/(N-2)}\,ds < \infty. \tag{2.9}$$

Théorème 2.1. *Supposons $N \geq 3$ et g une fonction continue qui satisfait la condition de singularité faible au bord. Alors pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$, le problème (2.1) admet une solution u, en plus on a l'estimation,*

$$\int_\Omega |u|\,dx + \int_{\partial\Omega} |g(u)|\,dS \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}. \tag{2.10}$$

Si en plus g est croissante, alors la solution est unique.

Preuve :

Soit $(\mu_k)_k$ une suite de fonctions continues qui converge faiblement vers μ , en particulier $\|\mu_k\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}$ est bornée. On note u_k la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u_k + u_k = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial n} + g(u_k) = \mu_k \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

À partir de l'estimation (2.5) on conclut que $\{g(u_k)\}_k$ est bornée dans $L^1(\partial\Omega)$, cela combiné avec l'estimation dans Proposition 1.3 et celle de Proposition 1.4 on déduit que la suite $(u_k)_k$

converge fortement dans $L^1(\Omega)$ et dans $L^1(\partial\Omega)$ (voir aussi la Remarque 1.3). Ainsi $\{g(u_k)\}_k$ converge ponctuellement presque partout vers $g(u)$ en plus on a l'estimation ,

$$\int_\Omega |u_k|\, dx + \int_{\partial\Omega} |g(u_k)|\, dS \leq \|\mu_k\|_{L^1(\partial\Omega)}. \tag{2.11}$$

On considère la suite d'approximation $\{\mu_k\}$ celle du Lemme 1.1. Si on prend la limite inférieure dans l'estimation (2.11) et on applique le lemme de Fatou,

$$\int_\Omega |u|\, dx + \int_{\partial\Omega} |g(u)|\, dS \leq \int_{\partial\Omega} d\,|\mu|. \tag{2.12}$$

On a bien prouvé l'inégalité (2.10). Reste à montrer que u est bien une solution. Afin de montrer la convergence forte de $(g(u_k))_k$ vers $g(u)$ dans $L^1(\partial\Omega)$, nous allons utiliser le lemme de Vitali et montrer l'équi-intégrabilité de la suite $(g(u_k))_k$.

Soient $\epsilon > 0$, $\sigma \subset \partial\Omega$ un ensemble borélien et $R > 0$,

$$\begin{aligned}\int_\sigma |g(u_k)|\, dS &\leq \int_{\sigma\cap\{|u_k|\leq R\}} |g(u_k)|\, dS + \int_{\sigma\cap\{|u_k|>R\}} (g(|u_k|) + |g(-|u_k|)|)\, dS,\\ &\leq \tilde{g}(R)\ |\sigma| + \int_{\sigma\cap\{|u_k|>R\}} (g(|u_k|) + |g(-|u_k|)|)\, dS,\end{aligned}$$

où $\tilde{g}(R) = \max\limits_{|x|\leq R} |g(x)|$.

Pour $\lambda \geq 0$, soit $\alpha_k(\lambda) := |\{x \in \partial\Omega : |u_k(x)| > \lambda\}|$, où pour un ensemble $E \subset \partial\Omega$, on note dans ce cas $|E|$ sa mesure de Lebesgue en dimension $N-1$.

D'après la Proposition 1.4, l'inégalité (1.25) , et les propriétés des espaces de Marcinkiewicz (voir Chapitre 1),

$$\alpha_k(\lambda) \leq C\,\|\mu_k\|^{(N-1)/(N-2)}\,\lambda^{-(N-1)/(N-2)} \leq C_1\,\lambda^{-(N-1)/(N-2)}.$$

Par l'utilisation du principe de Cavalieri [40] , et l'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_{\sigma\cap\{|u_k|>R\}} (g(|u_k|) + |g(-|u_k|)|)\, dS &\leq \int_{\{|u_k|>R\}} (g(|u_k|) + |g(-|u_k|)|)\, dS,\\ &\leq -\int_R^\infty (g(\lambda) + |g(-\lambda)|)\, d\alpha_k(\lambda),\\ &\leq \alpha_k(R)(g(R) + |g(-R)|) + \int_R^\infty \alpha_k(\lambda)\, d(g(\lambda) + |g(-\lambda)|)).\end{aligned}$$

Estimons cette dernière intégrale,

$$\begin{aligned}\int_R^\infty \alpha_k(\lambda) d(g(\lambda) + |g(-\lambda)|) &\leq C_1 \int_R^\infty \lambda^{-(N-1)/(N-2)} d(g(\lambda) + |g(-\lambda)|),\\ &\leq -C_1(g(R) + |g(-R)|)R^{-(N-1)/(N-2)}\\ &\quad + C_1\frac{N-1}{N-2}\int_R^\infty (g(\lambda) + |g(-\lambda)|)\,\lambda^{-1-(N-1)/(N-2)}\, d\lambda.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_\sigma |g(u_k)|\, dS \leq \tilde{g}(R)\ |\sigma| + C_1\frac{N-1}{N-2}\int_R^\infty (g(\lambda) + |g(-\lambda)|)\,\lambda^{-(2N-3)/(N-2)}\, d\lambda.$$

Utilisons l'hypothèse (2.9), on fixe le paramètre $R > 0$ de telle sorte à avoir,

$$C_1 \frac{N-1}{N-2} \int_R^\infty (g(\lambda) \, + \, |g(-\lambda)|) \, \lambda^{-(2N-3)/(N-2)} \, d\lambda < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si on prend

$$\delta < \frac{\epsilon}{2 \, + \, 2 \, \tilde{g}(R)},$$

alors, pour tout σ tel que $|\sigma| < \delta$,

$$\int_\sigma |g(u_k)| \, dS < \epsilon.$$

L'équi-intégrabilité vient d'être établie. Lorsqu'on passe à la limite dans la formulation faible de la solution en u_k , on conclut que u est bien une solution du problème (2.1).

Supposons maintenant que g est croissante, et que u et v sont deux solutions du problème (2.1) avec data μ. Considérons la fonction $w := u - v$, ainsi w vérifie

$$\begin{cases} -\Delta w \, + w = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} \, + \, [g(u) - g(v)] = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

En appliquant l'estimation (1.32) pour $\xi = 1$

$$\int_\Omega |w| \, dx \, + \, \int_{\partial\Omega} [g(u) - g(v)] \, sign(u - v) \, dS \, \leq 0. \tag{2.14}$$

La croissance de g entraîne que le produit $[g(u) - g(v)] \, sign(u - v)$ est positive, ce qui entraîne que $w = 0$. D'où l'unicité.

■

Remarque 2.1. *:*

1) *L'exemple typique d'une non linéarité faiblement sous critique au bord est* $|u|^{p-1}u$ *pour* $1 \leq p < (N-1)/(N-2)$.

2) *Lorsque* $g(u) := |u|^{p-1}u$ *avec* $p \geq (N-1)/(N-2)$ *on verra au Chapitre 3 que le problème peut ne pas admettre de solution, et qu'une condition supplémentaire sur la mesure* μ *s'impose pour avoir l'existence de solution (Théorème 3.2). Cette condition est similaire à celle de Baras et Pierre dans ([3] , Théorème 4.1) .*

2.4 Problème en dimension N=2

L'étude du problème (2.1) en dimension $N = 2$, lorsque la donnée est une mesure, est effectuée en utilisant la notion d'ordre de croissance exponentielle introduite par J.L.Vazquez [36]. Nous allons voir en premier temps que lorsque la non linéarité a un ordre de croissance exponentielle nul, le problème (2.1) admet une solution pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$ sans aucune condition supplémentaire sur cette mesure, ce qu'on peut classer dans le contexte de non linéarité sous critique en dimension $N \geq 3$. Lorsque la dimension $N = 2$, le résultat du Théorème 2.2 n'a pas d'analogue en dimension $N \geq 3$, la puissance de ce résultat est de pouvoir exprimer toute les mesures μ pour lesquels le problème (2.1) admet une solution pour une non linéarité fixée. Ce résultat est fortement liée au concept de mesures réduites introduites par H. Brezis, A.C.Ponce et M.Marcus dans [10] et dans [11] . En effet le secret du Théorème 2.2 est de pouvoir caractériser la mesure réduite et de donner le lien entre cette mesure réduite et la mesure initiale μ et cela en termes de deux paramètres qui dépendaient de la non linéarité g.

On considère maintenant Ω un domaine connexe de $\mathbb{R}^2$, la fonction $g(.)$ est une fonction continue qui satisfait la condition du signe $s \cdot g(s) \geq 0$ et μ une mesure finie sur $\partial\Omega$.

Définition 2.2. *On définit pour une fonction $h \in C([0,\infty))$, $h \geq 0$, l'ordre de croissance exponentiel à l'infini par :*

$$a_+(h) := \inf\{a \geq 0 : \int_0^\infty h(s)e^{-as}\,ds < \infty\}. \tag{2.15}$$

Si $h \in C([-\infty,0))$, $h \leq 0$, alors l'ordre de croissance exponentiel à moins l'infini est :

$$a_-(h) := \sup\{a \leq 0 : \int_{-\infty}^0 h(s)e^{-as}\,ds > -\infty\}. \tag{2.16}$$

Exemples 2.1 :

(1) Si $h(s) = \dfrac{s\,e^{\alpha s}}{1+s^4}$ pour $\alpha > 0$, alors $a_+(h) = \alpha$, en plus l'intégrale $\int_0^\infty h(s)e^{-as}\,ds$ est finie pour $a = a_+(h)$, c'est à dire l'infimum dans ce cas est un minimum.

(2) si $h(s) = |s|^q s\, e^{\beta s}$ pour $\beta, q > 0$ alors il est clair que $a_+(h) = \beta$, par contre l'intégrale $\int_0^\infty h(s)e^{-as}\,ds$ est infinie pour $a := a_+(h)$. Ce qui veut dire que l'infimum n'est pas atteint.

2.4.1 Solvabilité inconditionnelle

Définition 2.3. *On dit qu'une fonction continue g satisfait l'hypothèse de singularité faible sur le bord en dimension 2, si :*

(i) $s\,g(s) \geq 0 \quad (\forall s \in \mathbb{R})$,

(ii) il existe une fonction croissante $g_1 \in C([0,\infty))$, $g_1 \geq 0$ telle que $a_+(g_1) = 0$, et que

$$g(s) \leq g_1(s) \quad \forall s \geq 0,$$

(iii) il existe une fonction croissante $g_2 \in C[-\infty,0))$, $g_2 \leq 0$ telle que $a_-(g_2) = 0$, et que

$$g(s) \geq g_2(s) \quad \forall s \leq 0.$$

On peut réécrire l'hypothèse de croissance exponentielle d'ordre 0 sur les fonctions g_1 et g_2, par :

$$(\forall a > 0) \quad \int_0^\infty (g_1(s) - g_2(-s))\,e^{-as}\,ds < \infty.$$

Proposition 2.3. *On considère $N = 2$. Soit g une fonction continue qui vérifie la condition du signe. Si g satisfait l'hypothèse de singularité faible sur le bord en dimension 2, alors pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$, le problème (2.1) admet une solution . En plus on a l'estimation*

$$\int_\Omega |u|\,dx + \int_{\partial\Omega} |g(u)|\,dS \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}. \tag{2.17}$$

Preuve :

Étape 1 :

Soit $(\mu_n) \subset C^\infty(\partial\Omega)$ qui converge étoile faiblement vers μ au sens des mesures sur $\partial\Omega$. C'est à dire :

$$(\forall \xi \in C_0(\partial\Omega)) \quad \int_{\partial\Omega} \xi \mu_n dS \qquad \to \qquad \int_{\partial\Omega} \xi d\mu.$$

Soit u_n la solution très faible du problème :

$$\begin{cases} \quad -\Delta u_n + u_n = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial n} + g(u_n) = \mu_n \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.18}$$

À partir de (2.5), la solution u_n vérifie l'estimation,

$$\int_\Omega |u_n| dx + \int_{\partial\Omega} |g(u_n)|\, dS \leq \int_{\partial\Omega} |\mu_n|\, dS. \tag{2.19}$$

Combinons la dernière estimation avec l'estimation (1.31), on obtient,

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_{M^2(\Omega)} &\leq C(\|\mu_n - g(u_n)\|)_{L^1(\partial\Omega)}, \\ &\leq C_2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Donc, pour $a \in \Omega$, on a,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\cap B_r(a)} |\nabla u_n| dx &\leq C_2 |\Omega \cap B_r(a)|^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq c_2 \sqrt{\pi} r. \end{aligned}$$

Ce qui entraine, grâce au théorème de John et Nirenberg (voir par exemple [24] Théorème 7.21) :

$$\int_\Omega exp\Big(\frac{\lambda |u_n|}{c_2\sqrt{\pi}}\Big) dx \leq C|\Omega| exp\Big(\frac{\lambda |\overline{u}_n|}{c_2\sqrt{\pi}}\Big) dx \leq c_3, \tag{2.21}$$

où λ est une constante, $\overline{u}_n := \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega u_n dx$. et c_3 une constante indépendante de n (puisque u_n est bornée dans $L^1(\Omega)$).

Par conséquent $u_n \in L^p(\Omega) \;\; \forall p < \infty$ et il existe un $c_5 > 0$ et $\beta > 0$ telle que :

$$\theta_n(t) := |\{x : |u_n| > t\}| \leq c_5\, e^{-\beta t} \quad (\forall t > 0).$$

On conclut que $\{u_n\}$ converge faiblement dans $W^{1,2-\delta}(\Omega)$ vers une limite qu'on note u et converge fortement et ponctuellement vers u dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q > 1$.

Si on prend $\{\mu_n\}$ tel que $\|\mu_n\|_{L^1(\partial\Omega)} \to \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}$ (comme dans Lemme 1.1) et on passe à la limite inférieure dans (2.19) et en appliquant le lemme de Fatou, on obtient l'estimation (2.17). Reste à montrer que u est une solution.

Étape 2 : Convergence

La fonction u_n est solution de (2.18) si,

$$(\forall \xi \in \mathcal{C}_\Omega) \quad \int_\Omega u_n(-\Delta\xi + \xi) dx + \int_{\partial\Omega} g(u_n)\xi dS = \int_{\partial\Omega} \xi\mu_n dS. \tag{2.22}$$

À partir de résultats de l'étape 1, les deux termes de (2.22) $\int_\Omega u_n(-\Delta\xi + \xi)dx$ et $\int_{\partial\Omega} \xi\mu_n dS$ convergent respectivement vers $\int_\Omega u(-\Delta\xi + \xi)dx$ et $\int_{\partial\Omega} \xi\mu dS$ pour tout $\xi \in \mathcal{C}_\Omega$.

La suite $(g(u_n))_n$ converge ponctuellement vers $g(u)$, pour montrer la convergence forte de $(g(u_n))$ dans $L^1(\partial\Omega)$ il suffit de montrer que la suite est équi-intégrable.

Soit E un ensemble borélien inclus dans $\partial\Omega$, et $R > 0$ un paramètre qu'on va préciser ultérieurement. On a

$$\begin{aligned}\int_E |g(u_n)|\, dS \leq & \int_{E\cap\{|u_n|\leq R\}} \Big(g_1(|u_n|) - g_2(-|u_n|) \Big) dS \\ & + \int_{E\cap\{|u_n|>R\}} \Big(g_1(|u_n|) - g_2(-|u_n|) \Big) dS, \\ & \leq \Big(g_1(|R| - g_2(-|R|) \Big)|E| - \int_R^\infty \Big(g_1(s) - g_2(-s) \Big) d\theta_n(s).\end{aligned}$$

Par intégration par partie,

$$\begin{aligned} & -\int_R^\infty \Big(g_1(s) - g_2(-s)\Big) d\theta_n(s) \\ & \quad = \Big(g_1(R) - g_2(-R)\Big)\theta_n(R) + \int_R^\infty \theta_n(s) d\Big(g_1(s) - g_2(-s)\Big), \\ & \quad \leq \Big(g_1(R) - g_2(-R)\Big) c_5\, e^{-\beta t} + c_5 \int_R^\infty e^{-\beta s} d\Big(g_1(s) - g_2(-s)\Big).\end{aligned}$$

Une nouvelle intégration par partie donne :

$$-\int_R^\infty \Big(g_1(s) - g_2(-s)\Big) d\theta_n(s) \leq \beta c_5 \int_R^\infty e^{-\beta s} \Big(g_1(s) - g_2(-s)\Big) dS.$$

Puisque g vérifie l'hypothèse de singularité faible sur le bord, on peut choisir R suffisamment grand tel que pour $\epsilon > 0$ arbitraire :

$$\beta c_5 \int_R^\infty e^{-\beta s} \Big(g_1(s) - g_2(-s)\Big) dS < \frac{\epsilon}{2}.$$

On choisit $\delta < \dfrac{\epsilon}{2(1 + g_1(R) - g_2(R))}$ de telle sorte ,

$$|g_1(R) - g_2(-R)|\ |E| < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ pour tout E, } \ |E| < \delta.$$

Avec ce choix de δ, pour tout ensemble borélien E tel que $|E| < \delta$, on a

$$\int_E |g(u_n)| dS < \epsilon.$$

La convergence ponctuelle et l'équi-intégrabilité de la suite $g(u_n)$ entraîne, par utilisation du lemme de Vitali, que $g(u_n)$ converge fortement dans $L^1(\partial\Omega)$ vers $g(u)$, et ainsi en faisant tendre n vers l'infini dans (2.22), on conclut que u est une solution.

■

2.4.2 Mesures sous critiques

Définition 2.4. *Soient g une fonction continue qui vérifie $s\, g(s) \geq 0$ et $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$ qui admet la décomposition de Lebesgue suivante :*

$$\mu = \mu_r + \mu_s + \sum_{i\in I} c_i\, \delta_{x_i},$$

où μ_r est la partie régulière de la décomposition par rapport à la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}_1$ et μ_s est la partie singulière non atomique, l'ensemble $\{c_i, x_i\}_{i\in I}$ désigne l'ensemble au plus dénombrable des atomes.

On dit que μ est sous critique dans le bord par rapport à g si

$$\frac{\pi}{a_-(g)} \leq c_i \leq \frac{\pi}{a_+(g)} \quad \forall i \in I. \tag{2.23}$$

Définition 2.5. *: (La condition d'intégrabilité)*

On suppose que g est une fonction continue. On dit que g vérifie la condition d'intégrabilité sur $\partial\Omega$ si pour tout $\underline{u}, u, \overline{u} \in L^1(\partial\Omega)$, tel que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ dans $\partial\Omega$, si $g(\underline{u}) \in L^1(\partial\Omega)$ et si $g(\overline{u}) \in L^1(\partial\Omega)$, alors $g(u) \in L^1(\partial\Omega)$.

Une définition alternative de la condition d'intégrabilité est donnée par le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Si g est une fonction continue, alors g vérifie la condition d'intégrabilité sur $\partial\Omega$ si et seulement si, pour tout $\underline{u}, \overline{u} \in L^1(\partial\Omega)$ tel que $\underline{u} \leq \overline{u}$ dans $\partial\Omega$ et que $g(\underline{u}); g(\overline{u}) \in L^1(\partial\Omega)$, il existe $h \in L^1(\partial\Omega)$ tel que pour tout $u \in L^1(\partial\Omega)$, si $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ dans $\partial\Omega$, alors $|g(u)| \leq h$ dans $\partial\Omega$.*

Voir [31], Lemme 6.9 pour la preuve.

Comme conséquence de la condition d'intégrabilité, on a le corollaire suivant ([31], Corollaire 6.10).

Corollaire 2.1. *Supposons que g est une fonction continue qui satisfait la condition d'intégrabilité sur $\partial\Omega$. Si $(u_n)_n$ est une suite monotone de $L^1(\partial\Omega)$ qui converge à u dans $L^1(\partial\Omega)$, et si pour tout n, $g(u_n) \in L^1(\partial\Omega)$, alors $\{g(u_n)\}_n$ converge vers $g(u)$ dans $L^1(\partial\Omega)$ si et seulement si $g(u) \in L^1(\partial\Omega)$.*

Esquisse de la preuve

L'une des deux implications est claire. Pour l'autre implication, supposons que $g(u) \in L^1(\partial\Omega)$, et montrons que $g(u_n) \to g(u)$ fortement dans $L^1(\partial\Omega)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que (u_n) est décroissante.

On a $u \leq u_n \leq u_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et puisque les deux fonctions $g(u_0), g(u)$ sont dans L^1 alors par le résultat du Lemme 2.3, il existe $h \in L^1$, tel qu'on a $|g(u_n)| \leq h$, ainsi la convergence forte de $g(u_n)$ est déduite grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue.

□

Théorème 2.2. *Soit g une fonction de classe C^2, convexe, et qui vérifie la condition du signe. Si en plus g vérifie l'une des conditions suivantes*

i) les deux quantités $a_+(g)$ et $a_-(g)$ sont atteintes,

ii) g est croissante,

iii) g vérifie la condition d'intégrabilité sur $\partial\Omega$.

Alors le problème,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad dans \quad \mathbb{R}^2_+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + g(u) = c\,\delta_0 \quad sur \quad \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{2.24}$$

admet une solution u si et seulement si

$$\frac{\pi}{a_-(g)} \leq c \leq \frac{\pi}{a_+(g)}. \tag{2.25}$$

La **condition nécessaire** de ce théorème est donnée par le lemme suivant.

Lemme 2.4. *Supposons que g est une fonction de classe C^2, convexe, et qui vérifie la condition du signe. Si*

$$c > \frac{\pi}{a_+(g)},$$

alors le problème (2.24) n'admet pas de solution.

Preuve du lemme :

Supposons qu'une telle solution u existe. Clairement $0 \lneqq u \lneqq c\psi$ (la notation $\lneqq$ pour les fonctions exprime le fait qu'on a l'inégalité $\leq$ partout, sans autant qu'on a les deux fonctions soient identiquement égaux), où ψ est la solution du

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \psi = 0 \quad dans \quad \mathbb{R}^2_+, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = \delta_0 \quad sur \quad \partial\mathbb{R}^2_+. \end{cases} \tag{2.26}$$

La fonction ψ a le comportement asymptotique suivant (voir Appendice 5.5)

$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi}\log|x| + o(1) \text{ quand } x \to 0 \text{ et } 0 \leq \psi(x) \leq ce^{-|x|} \text{ quand } x \to \infty. \tag{2.27}$$

On remarque qu'on a dans $\mathbb{R}^2_+$,

$$\begin{aligned} -\Delta\, g\circ u(x) + g\circ u(x) &= -g^{'}(u)\,u - g^{''}(u)|\nabla u|^2 + g(u), \\ &\leq -g^{'}(u)u + g(u) \quad (\text{car } g \text{ est convexe}), \\ &\leq [g^{'}(\sigma) - g^{'}(u)]u \quad \text{pour un certain } \sigma \in]0,u[\\ &\text{(théorème des accroissement fini entre } (0,u)), \\ &\leq 0. \quad (g \text{ est convexe}) \end{aligned}$$

Donc $g\circ u$ est une sous-solution positive. Comme $g\circ u(.,0) \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g\circ u(x_1,x_2)\,dx_1 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g\circ u(x_1,0)\,dx_1 \;\; \forall x_2 > 0. \tag{2.28}$$

Définissons $w = u - c\psi$. Alors en coordonnées radiales ; w vérifie

$$-w_{rr} - \frac{1}{r}w_r - \frac{1}{r^2}w_{\theta\theta} + w = 0. \tag{2.29}$$

Soit $X(r) = \int_0^\pi w(r,\theta)\,d\theta$, comme

$$-\int_0^\pi w_{\theta\theta}\,d\theta = -[w_\theta(r,.)]_0^\pi = -w_\theta(r,\pi) + w_\theta(r,0) = r(g\circ u(r,\pi) + g\circ u(r,0)).$$

On obtient en intégrant l'équation de w entre $(0,\pi)$,

$$-(rX^{'})^{'} + rX(r) + (g\circ u(r,\pi) + g\circ u(r,0)) = 0. \tag{2.30}$$

Puisque

$$\int_0^\infty (g\circ u(r,\pi) + g\circ u(r,0))\,dr = \int_{\partial\mathbb{R}^2_+} g\circ u\,dx_1 < \infty,$$

et,

$$\int_0^{\infty} X(r) r\, dr = \int_{\mathbb{R}^2_+} w(x)\, dx < \infty,$$

on déduit que $r \mapsto rX^{'}(r)$ admet une limite finie α quand r tend vers 0.

Supposons que $\alpha \neq 0$, alors

$$X^{'}(r) = \frac{\alpha}{r}\,(1 + \circ(1)) \quad \text{quand} \quad r \to 0.$$

Par conséquent,

$$X(r) = \alpha(\log r)(1 + \circ(1)) \quad \text{quand} \quad r \to 0.$$

Clairement α ne peut pas être positif. Donc

$$\int_0^{\pi} u(r,\theta)\, d\theta = (c + \alpha)\,(1 + \circ(1))\, \log(r^{-1}) \quad \text{quand} \quad r \to 0.$$

Ainsi,

$$\int_0^{\pi} u_r(r,\theta)\, d\theta = -\left(\frac{c+\alpha}{r}\right)(1 + \circ(1)) \quad \text{quand} \quad r \to 0.$$

Pour $\epsilon > 0$ on pose $B_\epsilon^{+c} = B_\epsilon^c \cap \mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1, x_2) : |x| > \epsilon, x_2 > 0\}$. Puisque $\mathbb{L}u := -\Delta u + u = 0$ dans $\mathbb{R}^2_+$, on a

$$0 = \int_{B_\epsilon^{+c}} u \mathbb{L}\xi\, dx - \int_{\partial B_\epsilon^{+c} \cap \mathbb{R}^2_+} \frac{\partial u}{\partial n}\, \xi\, dS + \int_{\partial \mathbb{R}^2_+ \cap \partial B_\epsilon^{+c}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \xi\, dx_1 + \int_{\partial B_\epsilon^{+c}} \frac{\partial \xi}{\partial n} u\, dS.$$

Quand $\epsilon \to 0$, on a les limites suivantes

$$\int_{B_\epsilon^{+c}} u \mathbb{L}\xi\, dx \to \int_{\mathbb{R}^2_+} u \mathbb{L}\xi\, dx,$$

$$-\int_{\partial B_\epsilon^{+c} \cap \mathbb{R}^2_+} \frac{\partial u}{\partial n} \xi\, dS = \epsilon \int_0^{\pi} u_r(\epsilon,\theta)\, \xi(\epsilon,\theta)\, d\theta \to -(c+\alpha)\, \xi(0),$$

$$\int_{\partial B_\epsilon^{+c}} \frac{\partial \xi}{\partial n} u\, dS \to 0,$$

et,

$$\int_{\partial \mathbb{R}^2_+ \cap \partial B_\epsilon^{+c}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \xi\, dx_1 = \int_{\partial \mathbb{R}^2_+ \cap \partial B_\epsilon^{+c}} g \circ u\, \xi\, dx_1 \to \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} g \circ u\ \xi\ dx_1.$$

Finalement,

$$\int_{\mathbb{R}^2} u\, \mathbb{L}\xi\ dx + \int_{\partial \mathbb{R}^2_+} g \circ u\, \xi\, dx_1 = (c+\alpha)\xi(0).$$

Contradiction, donc $\alpha = 0$. Par conséquence, si $r \to 0$,

$$\int_0^{\pi} u_r(r,\theta)\, d\theta = -\frac{c}{r}(1 + \circ(1)) \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} u(r,\theta)\, d\theta = c \log\left(\frac{1}{r}\right)(1 + \circ(1)).$$

On utilise maintenant l'hypothèse de convexité portant sur la fonction g. Si $c > \frac{\pi}{a_+(g)}$, alors pour tout $\gamma \in]\frac{\pi}{a_+(g)}, c[$ il existe $r_\gamma > 0$ tel que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(r,\theta)\,d\theta \geq \frac{\gamma}{\pi}\log\left(\frac{1}{r}\right) \quad \forall r \in]0, r_\gamma[.$$

Par application de l'inégalité de Jensen,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g\circ u(r,\theta)\,d\theta \geq g\Big(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(r,\theta)\,d\theta\Big) \geq g\Big(\frac{\gamma}{\pi}\log\left(\frac{1}{r}\right)\Big).$$

D'où, pour $\delta > 0$

$$\int_0^1\int_0^\pi g\circ u(r,\theta)\,d\theta r^\delta\,dr \geq \pi\int_0^1 g\Big(\frac{\gamma}{\pi}\log\left(\frac{1}{r}\right)\Big)\,r^\delta\,dr = \frac{\pi^2}{\gamma}\int_0^\infty g(s)\,e^{-\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta)s}\,ds.$$

On choisit δ tel que $\frac{\pi}{\gamma}(1+\delta) < a_+(g)$ et on en déduit que

$$\int_0^1\int_0^\pi g\circ u(r,\theta)\,d\theta r^\delta\,dr = \infty \Longleftrightarrow \int_0^1\int_{-1}^1 g\circ u(x_1,x_2)\,\frac{dx_1\,dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1-\delta}{2}}} = \infty.$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 g\circ u(x_1,x_2)\frac{dx_1}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1-\delta}{2}}} &\leq \int_{-1}^1 g\circ u(x_1,x_2)\frac{dx_1}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1-\delta}{2}}},\\ &\leq \frac{1}{x_2^{1-\delta}}\int_{-1}^1 g\circ u(x_1,x_2)\,dx_1,\\ &\leq \frac{1}{x_2^{1-\delta}}\int_{-1}^1 g\circ u(x_1,0)\,dx_1.\end{aligned}$$

Par intégration

$$\int_0^1\int_{-1}^1 g\circ u(x_1,x_2)\,\frac{dx_1 dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1-\delta}{2}}} < \infty.$$

Contradiction.

□

La preuve que le problème (2.24) associée à $c < \frac{\pi}{a_-(g)}$ n'admet pas de solution est similaire.

Preuve du Théorème 2.2 : Condition suffisante

On note $\Omega = \mathbb{R}^2_+$.

La solution u du problème (2.24) est majorée par la fonction $|c|\,\psi$, et minorée par $-|c|\,\psi$, donc une condition suffisante de solvabilité est

$$-\infty < \int_{\partial\Omega} g(c\,\psi)\,dS < \infty. \tag{2.31}$$

(Pour plus de détails, voir la prochaine section 2.5).

Puisque la fonction ψ a une singularité au voisinage de 0 d'ordre $-(1/\pi)\log r$, alors 0 est la seule singularité de l'intégrale précédente, donc (2.31) est équivalente à

$$-\infty < \int_{\partial\Omega\cap\{x:|x|\leq 1\}} g\Big(\frac{c}{\pi}\log\left(\frac{1}{|x|}\right)\Big)\,dS < \infty. \tag{2.32}$$

En effectuant le changement $s = -\frac{c}{\pi}\log r$, cette dernière condition est vérifiée pour tout c tel que

$$\frac{\pi}{a_-(g)} < c < \frac{\pi}{a_+(g)}. \tag{2.33}$$

Par contre, comme on a déjà vu dans Exemples 2.1, il n'est pas clair que (2.32) soit finie pour $c = \pi/(a_+(g))$ ou bien $c = \pi/(a_-(g))$.

Si les deux extrémaux $a_+(g)$ et $a_-(g)$ sont atteints (voir Définition 2.2) alors les inégalités dans (2.33) devienne large, ce qui donnera le résultat du Théorème.

On s'intéresse maintenant au cas où l'une des quantités $a_+(g)$; $a_-(g)$ n'est pas atteinte. Pour fixer, supposons que $a_+(g)$ n'est pas atteinte et montrons que le problème (2.24) associé à $c = \frac{\pi}{a_+(g)}$ admet une solution et cela en supposant que l'une des hypothèses ii) ou iii) soit vérifier.

Soit $c_n \in]0, \frac{\pi}{a_+(g)}[$ une suite strictement croissante qui converge vers $c := \frac{\pi}{a_+(g)}$.
Alors la suite de problèmes

$$\begin{cases} -\Delta u_n \ + u_n = 0 \ \ dans \ \ \mathbb{R}^2_+, \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial n} \ + \ g(u_n) = c_n\, \delta_0 \ \ sur \ \ \partial\mathbb{R}^2_+, \end{cases} \tag{2.34}$$

admet chacun une solution u_n telle que $0 \lneqq u_n \lneqq c\psi$.

La croissance de c_n entraîne que u_n est croissante, par conséquent elle converge presque partout et fortement dans $L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ vers une limite qu'on note u. Ainsi, la suite $g(u_n)$ converge presque partout vers $g(u)$. Utilisons la fonction test $\eta_1 = 1$ dans l'équation en u_n on obtient,

$$\int_\Omega u_n + \int_{\partial\Omega} g(u_n)\, dS = c_n. \tag{2.35}$$

En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} g(u_n)\, dS = \left(c - \int_\Omega u\right) < \infty. \tag{2.36}$$

Par conséquent,

- si g est croissante, alors $g(u_n)$ converge fortement dans $L^1(\partial\Omega)$ vers $g(u)$, et cela grâce au théorème de la convergence monotone de Beppo-Levi,

- et si g vérifie la condition d'intégrabilité sur $\partial\Omega$, alors la convergence forte dans $L^1(\partial\Omega)$ de la suite $\{g(u_n)\}_n$ vers $g(u)$ découle du Corollaire 2.1.

Finalement, dans les deux cas, en laissant n tend vers l'infini dans la formulation faible de la solution de (2.34), on conclut que le problème (2.24) pour $c = \pi/a_+(g)$ admet une solution.

La preuve que le problème (2.24) associé à $c = \pi/a_-(g)$ admet une solution est similaire.

■

Remarque 2.2. *Noter que la seule utilisation des conditions i), ii) et iii) du Théorème 2.2 est pour assurer l'existence d'une solution de (2.24) lorsque $c = \pi/a_+(g)$ et lorsque $c = \pi/a_-(g)$.*

Pour un domaine Ω quelconque, et pour une donnée $\mu \in \mathcal{M}_b(\partial\Omega)$ arbitraire. On conjecture qu'une version plus générale du théorème précédent est valide. Ce qu'on l'annonce par le théorème suivant.

Théorème 2.3. *Supposons $N = 2$. Soit $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$ qui admet la décomposition de Lebesgue suivante :*

$$\mu = \mu_r + \mu_s + \sum_{i \in I} c_i \, \delta_{x_i}.$$

Alors le problème (2.1) admet une solution si et seulement si :

$$\frac{\pi}{a_-(g)} \leq c_i \leq \frac{\pi}{a_+(g)} \quad \forall i \in I. \tag{2.37}$$

Remarque 2.3. *:*

(1) *La Proposition 2.3 est un cas particulier du Théorème 2.3, en effet lorsque g vérifie la condition de singularité faible sur le bord en dimension 2, alors $a_+(g) = a_-(g) = 0$, ainsi la condition (2.37) est vérifié pour toute mesure μ, autrement dit toute mesure sur le bord est sous critique par rapport à g.*

2.5 Mesures admissibles

Définition 2.6. *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$, avec la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$. On dit que μ est $g-$admissible si*

$$g(\mathbb{D}_{\mu_+}) + |g(-\mathbb{D}_{\mu_-})| \in L^1(\partial\Omega). \tag{2.38}$$

Théorème 2.4. *Soit g une fonction continue croissante qui satisfait la condition du signe. Si $\mu \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$ est g-admissible, alors le problème (2.1) admet une solution unique. En plus on a l'estimation,*

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} + \|g(u)\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}. \tag{2.39}$$

Preuve : Si u , v sont des solutions du même problème (2.1) alors $(u - v)$ vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta(u-v) + (u-v) = 0 & dans \;\; \Omega, \\ \dfrac{\partial(u-v)}{\partial n} + [g(u) - g(v)] = 0 & sur \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Puisque : $(u-v)\,[g(u)-g(v)] \geq 0$, alors le principe de comparaison dans le Corollaire 1.2 entraîne que $u = v$, d'où l'unicité.

Soit $v_1 := \mathbb{H}_{\mu_+}$ l'unique solution positive du problème :

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + v_1 = 0 & dans \;\; \Omega, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial n} = \mu_+ & sur \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.40}$$

et soit $v_2 := -\mathbb{H}_{\mu_-}$ l'unique solution négative du problème :

$$\begin{cases} -\Delta v_2 + v_2 = 0 & dans \;\; \Omega, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial n} = -\mu_- & sur \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.41}$$

Soit $g_k(s) = sign(s) \min\{|g(s)|, |g(k)|\}$, et u_k la solution du :

$$\begin{cases} -\Delta u_k + u_k = 0 & dans \;\; \Omega, \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial n} + g_k(u_k) = \mu & sur \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.42}$$

Rappelons que la solution est prise au sens suivant :

$$\int_{\Omega} u_k(-\Delta\xi + \xi)dx + \int_{\partial\Omega} g_k(u_k)\,\xi dS = \int_{\partial\Omega} \xi d\mu \quad (\forall \xi \in \mathcal{C}_\Omega). \tag{2.43}$$

Noter que (2.42) admet une solution unique, puisque g_k est une non linéarité sous-critique croissante (voir Théorème 2.1 et Proposition 2.3).
On a :

$$\begin{cases} -\Delta(v_2 - u_k) + (v_2 - u_k) = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial(v_2 - u_k)}{\partial n} = -\mu_- - \mu + g_k(u_k) \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après (1.33), pour tout $\xi \in \mathcal{C}_\Omega \;\; \xi \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v_2 - u_k)_+ (-\Delta\xi + \xi)dx &\leq \int_{\partial\Omega} \xi sign_+(v_2 - u_k)\,(-\mu_+ + g_k(u_k))dS, \\ &\leq \int_{\partial\Omega} \xi g_k(u_k) sign_+(v_2 - u_k)dS, \\ &\leq 0. \quad (\text{puisque } v_2 \leq 0) \end{aligned}$$

Par conséquent $v_2 \leq u_k$ dans $\overline{\Omega}$.

Prenons la différence entre les deux équations (2.42) et (2.40), alors $(u_k - v_1)$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta(u_k - v_1) + (u_k - v_1) = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial(u_k - v_1)}{\partial n} + g_k(u_k) = \mu - \mu_+ \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

D'une manière équivalente $(u_k - v_1)$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta(u_k - v_1) + (u_k - v_1) = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial(u_k - v_1)}{\partial n} + [g_k(u_k) - g_k(v_1)] = -\mu_- - g_k(v_1) \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.44}$$

Puisque $v_1 \geq 0$ alors terme $-\mu_- - g_k(v_1)$ est négative, en outre $(g_k(u_k) - g_k(v_1))(u_k - v_1) \geq 0$, c'est à dire que la non linéarité du problème (2.44) vérifie la condition du signe, par application du Corollaire 1.2 cas (i) on déduit que $u_k \leq v_1$ dans $\overline{\Omega}$.

On a donc,

$$v_2 \leq u_k \leq v_1 \quad \text{dans} \quad \overline{\Omega}. \tag{2.45}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} |g_k(u_k)| &\leq g_k(v_1) + |g_k(v_2)| \quad sur \quad \partial\Omega, \\ &\leq g(v_1) + |g(v_2)| \quad sur \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.46}$$

L'estimation (1.18) implique :

$$\|u_k\|_{M^{\frac{N}{N-2}}} + \|\nabla u_k\|_{M^{\frac{N}{N-1}}} \leq C(\|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)} + \|g(v_1)\|_{L^1(\partial\Omega)} + \|g(v_2)\|_{L^1(\partial\Omega)}).$$

Comme conséquence du théorème de compacité de Rellich-Kondrachov, il existe une sous suite $\{u_k\}$ et u dans $W^{1,q}(\Omega)$ (pour tout $q < N/(N-1)$) tel que $\{u_k\}$ converge vers u dans $L^1(\Omega)$ et presque partout dans Ω .

En outre, la suite $g_k(u_k)$ converge presque partout vers $g(u)$ et l'hypothèse d'admissibilité (2.38) assure l'équi-intégrabilité de $g_k(u_k)$. Comme conséquence du lemme de Vitalli on conclut la convergence forte dans $L^1(\partial\Omega)$ de $g_k(u_k)$ vers $g(u)$. Lorsqu'on fait tendre k vers l'infini dans la formulation faible (2.43), on obtient que u est la solution faible de (2.1) .

Rappelons (voir (2.10) et (2.17)) qu'on a l'estimation suivante,

$$\|u_k\|_{L^1(\Omega)} + \|g_k(u_k)\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|\mu\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}.$$

Si on passe à la limite, on obtient bien l'estimation (2.39).

Chapitre 3

Singularités éliminables pour des non linéarités de type puissance

3.1 Présentation du problème

On a vu au chapitre précédent que lorsque la non linéarité g est de type puissance $g(u) = |u|^{p-1}u$, l'exposant p doit être sous critique ($p < p_c = (N-1)/(N-2)$) pour que le problème (3.2) admette une solution pour toute mesure μ.

On verra dans ce chapitre que lorsque p est super critique $p \geq p_c$, alors le problème non linéaire (3.2) peut ne pas admettre de solution pour certaine mesure, notamment lorsque $\mu = \gamma\delta_a$, où $a \in \partial\Omega$ et γ un nombre non nulle (Corollaire 3.2). Le Théorème 3.2 décrit la classe de mesure positive pour laquelle le problème (3.2) admet une solution. Dans un problème lié, on s'intéresse au problème des singularités isolées au bord du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1}\, u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\backslash\{a\}, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $p \geq 1$, Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ tel que $a \in \partial\Omega$.

La question de singularité ponctuelle peut être résumer de la façon suivante, en connaissant l'information sur u seulement dans $\overline{\Omega}\backslash\{a\}$ est ce qu'on peut prolonger "naturellement" la fonction u en a, de tel sorte que ce prolongement vérifie la même équation initiale sur $\overline{\Omega}$? si la réponse est positive, on dit qu'on a une singularité éliminable au point a. Dans le cas contraire, la question qui se pose à ce moment là, est la description des comportements possibles de u au voisinage du point a, de tels comportements s'appellent comportements admissibles.

3.2 Les Bonnes mesures

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1}\, u = \mu \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $p \geq (N-1)/(N-2)$ et $\mu \in \mathcal{M}_+(\partial\Omega)$.

Une mesure $\lambda \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$ est dite bonne pour le problème (3.2) si le problème (3.2) admet une solution lorsque la donnée au bord considérée est λ.

D'une manière analogue aux notations du chapitre 1, si T est une distribution à support inclut dans $\partial\Omega$, on note $\mathbb{H}_T$ et $\mathbb{D}_T$ la solution v et sa trace au bord $v\lfloor_{\partial\Omega}$ respectivement, du problème,

$$\begin{cases} -\Delta v + v = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = T \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Si u est une solution du problème (3.2), alors d'après le principe de comparaison (Corollaire 1.3 et Corollaire 1.4) on a formellement,

$$0 \leq u \leq \mathbb{H}_\mu \quad \text{dans} \quad \overline{\Omega}.$$

Une première approche envisageable pour résoudre le problème (3.2) est d'essayer de caractériser les mesures admissibles (voir Définition 2.6) associées au problème (3.2). Lorsque μ est une mesure positive, on peut reformuler la Définition 2.6 comme suite :

Une mesure positive μ est dite p-admissible si,

$$\int_{\partial\Omega} |\mathbb{D}_\mu|^p \, dS < \infty. \tag{3.4}$$

On a la caractérisation générale suivante de distributions T dont la trace de la solution associés $\mathbb{H}_T$ vérifie la condition (3.4) .

Proposition 3.1. *Supposons $1 < p < \infty$ et soit T une distribution à support inclut dans $\partial\Omega$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes,*

(i) $\mathbb{D}_T \in L^p(\partial\Omega)$.

(ii) $T \in W^{-1,p}(\partial\Omega)$.

En plus, il existe $C := C(\Omega, p) > 0$ tel que,

$$C^{-1}\|T\|_{W^{-1,p}(\partial\Omega)} \leq \|\mathbb{D}_T\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|T\|_{W^{-1,p}(\partial\Omega)}. \tag{3.5}$$

On rappelle que $W^{-1,p}(\partial\Omega)$ dénote l'espace dual du $W_0^{1,p'}(\partial\Omega)$.

Avant de prouver la Proposition 3.1, nous avons besoin du lemme suivant concernant l'opérateur de Dirichlet vers Neumann.

Lemme 3.1. *Supposons $1 < q < \infty$ et soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2. Soit $\mathbb{L}$ l'opérateur qui associe à une fonction η la fonction $\mathbb{L}[\eta] = \dfrac{\partial v}{\partial n}$, où v est la solution du problème,*

$$\begin{cases} -\Delta v + v = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ v = \eta \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Alors $\mathbb{L}$ est un isomorphisme entre $W^{1,q}(\partial\Omega)$ et $L^q(\partial\Omega)$ et on a en particulier,

$$C_1^{-1}\|\eta\|_{W^{1,q}(\partial\Omega)} \leq \|\mathbb{L}[\eta]\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq C_1\|\eta\|_{W^{1,q}(\partial\Omega)}. \tag{3.7}$$

Esquisse de la preuve du Lemme 3.1 :

Soit $\psi(x,y)$ la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\psi(x,.) \ +\psi(x,.) = 0 \ \ dans \ \ \Omega, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial\psi}{\partial n}(x,.) = \delta_x \ \ sur \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Alors pour $x \in \partial\Omega$, la solution v du problème (3.6) a la représentation suivante :

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \psi(x,y) \ \frac{\partial v}{\partial n}(y) \ dS(y).$$

La fonction $\psi(x,y)$ devient singulière lorsque y est proche de x, plus précisément elle admet le comportement suivant pour $N \geq 3$ (voir Appendice 5.5),

$$\psi(x,y) \sim \frac{c_N}{|x-y|^{N-2}}.$$

La singularité de ψ en $y = x$ est la même que le noyau de Riesz et du Bessel dans la dimension $N-1$ (dimension du bord). Donc pour $1 < q < \infty$ et par le théorème de A.P.Calderòn (voir [34], théorème V.3.) on a

$$\|v\|_{W^{1,q}(\partial\Omega)} \equiv \left\|\frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{L^q(\partial\Omega)}. \tag{3.9}$$

Autrement dit,

$$(\exists\, C_1 > 0) \ \ C_1^{-1}\|\eta\|_{W^{1,q}(\partial\Omega)} \leq \|\mathbb{L}[\eta]\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq C_1\|\eta\|_{W^{1,q}(\partial\Omega)}. \tag{3.10}$$

$\square$

Preuve du Proposition 3.1 :

$(i) \Rightarrow (ii)$:

La fonction $\mathbb{H}_T$ est la solution de l'équation,

$$\begin{cases} -\Delta\mathbb{H}_T \ + \mathbb{H}_T = 0 \ \ dans \ \ \Omega, \\ \qquad \dfrac{\partial\mathbb{H}_T}{\partial n} = T \ \ sur \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.11}$$

Soit $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$, et soit ψ le prolongement de ξ dans Ω qui vérifie,

$$\begin{cases} -\Delta\psi \ + \psi = 0 \ \ dans \ \ \Omega, \\ \qquad\quad \psi = \xi \ \ sur \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Utilisons ψ comme fonction test dans l'équation (3.11), on obtient

$$< T, \xi >= \int_{\partial\Omega} \mathbb{D}_T \, \frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS.$$

D'où,

$$\begin{aligned} | < T, \xi > | &\leq \|\mathbb{D}_T\|_{L^p(\partial\Omega)} \left\|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right\|_{L^{p'}(\partial\Omega)}, \\ &\leq C_1 \, \|\mathbb{D}_T\|_{L^p(\partial\Omega)} \, \|\xi\|_{W^{1,p'}(\partial\Omega)} \ \ \text{(application du Lemme 3.1)}. \end{aligned}$$

À partir du théorème de représentation de Riesz, T est une forme linéaire continue sur l'espace $W^{1,p'}(\partial\Omega)$, en plus,
$$\|T\|_{W^{-1,p}(\partial\Omega)} \leq C_1 \|\mathbb{D}_T\|_{L^p(\partial\Omega)}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$:

Soit $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$, et soit ψ la solution du,
$$\begin{cases} -\Delta\psi + \psi = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial n} = \xi \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Après utilisation de ψ comme une fonction test dans l'équation (3.11), on obtient,
$$< T, \psi >= \int_{\partial\Omega} \mathbb{D}_T \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS.$$

Donc,
$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} \mathbb{D}_T \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS \right| &\leq \|T\|_{W^{-1,p}(\partial\Omega)} \|\psi\|_{W^{1,p'}(\partial\Omega)}, \\ &\leq C_1 \|T\|_{W^{-1,p}(\partial\Omega)} \left\|\frac{\partial \psi}{\partial n}\right\|_{L^{p'}(\partial\Omega)} \quad \text{(Lemme 3.1).} \end{aligned}$$

Réécrivant cette dernière formule en terme de ξ,
$$\left| \int_{\partial\Omega} \mathbb{D}_T \, \xi \, dS \right| \leq C_1 \|T\|_{W^{-1,p}(\partial\Omega)} \|\xi\|_{L^{p'}(\partial\Omega)}.$$

À partir de théorème de représentation de Riesz on conclut que $\mathbb{D}_T \in L^p(\partial\Omega)$, avec l'estimation,
$$\|\mathbb{D}_T\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C_1 \|T\|_{W^{-1,p}(\partial\Omega)}.$$

■

Corollaire 3.1. *Soit $(\mu_n)_n$ une suite croissante de mesures positives appartenant à $W^{-1,p}(\partial\Omega)$, si $(\mu_n)_n$ converge faiblement au sens de mesure vers une mesure μ alors, le problème (3.2) à donnée μ admet une solution.*

Preuve : Soit u_n la solution du problème,
$$\begin{cases} -\Delta u_n + u_n = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial n} + |u_n|^{p-1} u_n = \mu_n \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le principe de comparaison illustré au Chapitre 1, la croissance de $(\mu_n)_n$ entraîne la croissance de la suite $(u_n)_n$.

L'existence de u_n découle du Proposition 3.1 et du Théorème 2.4, en plus on a l'estimation,
$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} + \|u_n\|^p_{L^p(\partial\Omega)} \leq \|\mu_n\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}.$$

La bornitude de (μ_n) entraîne celle de $(u_n)_n$ dans $L^1(\Omega)$ et dans $L^p(\partial\Omega)$, et d'après le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi, $(u_n)_n$ converge fortement dans $L^1(\Omega) \times L^p(\partial\Omega)$ vers une limite qu'on note u.

Lorsque n tend vers l'infini dans la formulation faible suivante de solution,
$$\int_\Omega u_n \, (-\Delta\xi + \xi) \, dx + \int_{\partial\Omega} |u_n|^{p-1} u_n \, \xi \, dS = \int_{\partial\Omega} \xi \, d\mu_n,$$

alors on déduit que u est la solution du problème (3.2) à donnée μ.

■

Le théorème suivant donne la condition nécessaire pour l'existence de solution de (3.2).

Théorème 3.1. *Soit $\mu \in \mathcal{M}_+(\partial\Omega)$ tel que le problème (3.2) admet une solution, alors $\mu(E) = 0$ pour tout ensemble borélien $E \subset \partial\Omega$ tel que $C_{1,p'}(E) = 0$.*

Remarque 3.1. *Une mesure μ qui s'annule pour tout borélien E de capacité $C_{1,p'}$ nulle, est appelée une mesure absolument continue par rapport à la capacité $C_{1,p'}$. (On trouve aussi la terminologie "diffuse" issue de la littérature anglaise).*

Rappelons la définition de capacité Sobolev d'un ensemble E.

Définition 3.1. *Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^m$. Alors*

$$C_{1,q}(K) = \inf\{\|\phi\|^q_{W^{1,q}(\mathbb{R}^m)} \ : \phi \in C_0^\infty, \ \phi = 1 \ \ sur \ \ K\}.$$

Si G est un ouvert. Alors

$$C_{1,q}(G) = \sup\{C_{1,q}(K) : K \subset G, K \, compact\}.$$

Si E est arbitraire. Alors

$$C_{1,q}(E) = \inf\{C_{1,q}(G) : E \subset G, G \, ouvert\}.$$

Preuve du Théorème 3.1 :

Si $p < (N-1)/(N-2)$, alors $p^{'} > N-1$ et par le théorème d'injection de Morrey, l'espace $W^{1,p^{'}}(\partial\Omega)$ s'injecte continuellement dans $C(\partial\Omega)$. Par conséquent, seul l'ensemble vide a une capacité $C_{1,p'}$ nulle.

On suppose maintenant que $p \geq (N-1)/(N-2)$.

Soit K un compact inclut dans $\partial\Omega$ et $\eta \in C^2(\partial\Omega)$ tel que $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta = 1$ dans K.

On note $\mathbb{P}_\eta$ le potentiel de Poisson associé à η, rappelons que $\mathbb{P}_\eta$ est la solution de l'équation,

$$\begin{cases} -\Delta \mathbb{P}_\eta = 0 \ \ dans \ \ \Omega, \\ \quad \mathbb{P}_\eta = \eta \ \ sur \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour toute fonction test ξ admissible de l'équation (3.2), on a,

$$\int_\Omega (-\Delta\xi \,+\, \xi)\, u\, dx = -\int_{\partial\Omega} \left(\xi u^p \,+\, \frac{\partial \xi}{\partial n} u\right) dS \,+\, \int_{\partial\Omega} \xi \, d\mu.$$

Pour $k > 1$, on prend $\xi = \mathbb{P}_\eta^k$ comme fonction test,

$$\int_\Omega \Big(-k(k-1)\mathbb{P}_\eta^{k-2} |\nabla \mathbb{P}_\eta|^2 \,+\, \mathbb{P}_\eta^k \Big)\, u\, dx = -\int_{\partial\Omega} \Big(\eta^k\, u^p \,+\, k\eta^{k-1} u\, \mathbb{L}_\eta \Big)\, dS \,+\, \int_{\partial\Omega} \eta^k \, d\mu.$$

Rappelons que $\mathbb{L}_\eta$ est l'opérateur défini comme dans le Lemme 3.1.(la seule différence est que le prolongement de η dans Ω est harmonique, mais on garde les mêmes propriétées qu'en Lemme3.1).

Puisque $\mathbb{P}_\eta$ est positive, on obtient,

$$\int_\Omega \mathbb{P}_\eta^k u\, dx \,+\, \int_{\partial\Omega} \eta^k u^p\, dS \,+\, \int_{\partial\Omega} k(\eta^{\frac{k}{p}}\, u)\, (\eta^{\frac{k}{p'}-1}\, \mathbb{L}_\eta)\, dS \geq \mu(K).$$

Par l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega \mathbb{P}^k_\eta u\,dx + \int_{\partial\Omega} \eta^k u^p\,dS + k\Big(\int_{\partial\Omega} \eta^k\,u^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{\partial\Omega} \eta^{k-p'}\,|\mathbb{L}_\eta|^{p'}\,dS\Big)^{\frac{1}{p'}} \ge \mu(K).$$

Prenons $k = p^{'}$ et utilisons (3.7),

$$\int_\Omega \mathbb{P}^{p'}_\eta\,u\,dx + \int_{\partial\Omega} \eta^{p'}\,u^p\,dS + p^{'}C_1\Big(\int_{\partial\Omega} \eta^{p'}\,u^p\,dS\Big)^{\frac{1}{p}}\,\|\eta\|_{W^{1,p'}(\partial\Omega)} \ge \mu(K). \tag{3.12}$$

Si on suppose que $C_{1,p'}(K) = 0$, alors il existe une suite $\{\eta_n\}$ tel que $0 \le \eta_n \le 1$, $\eta_n = 1$ sur K et $\|\eta_n\|_{W^{1,p'}(\partial\Omega)} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Puisque $u^p \in L^1(\partial\Omega)$, en faisant tendre $n \to \infty$ dans la formule suivante,

$$\int_\Omega \mathbb{P}^{p'}_{\eta_n} u\,dx + \int_{\partial\Omega} \eta_n^{p'}\,u^p\,dS + p^{'}C_1\Big(\int_{\partial\Omega} \eta_n^{p'}\,u^p\,dS\Big)^{\frac{1}{p}}\,\|\eta_n\|_{W^{1,p'}(\partial\Omega)} \ge \mu(K),$$

on déduit, après utilisation du théorème de convergence dominée de Lebesque, que $\mu(K) = 0$. Puisque la mesure μ est régulière, alors μ s'annule sur tout ensemble borélien de capacité $C_{1,p'}$ nulle.

■

Le théorème suivant collecte les résultats précédents.

Théorème 3.2. *Le problème (3.2) est résoluble pour $\mu \in \mathcal{M}_+(\partial\Omega)$ si et seulement si $\mu(E) = 0$ pour tout ensemble borélien $E \subset \partial\Omega$ tel que $C_{1,p'}(E) = 0$.*

Preuve :

La condition nécessaire est déjà vérifiée dans le Théorème 3.1. Reste à vérifier la condition suffisante.

Soit $\mu \in \mathcal{M}_+(\partial\Omega)$, telle que μ est nulle pour tout ensemble borélien $E \subset \partial\Omega$ à capacité $C_{1,p'}$ nulle. À partir du résultat de Feyel-de La Pradelle ([22], voir aussi [31] ou [37]) la mesure μ est la limite d'une suite croissante de mesures positives qui appartient à $W^{-1,p}(\partial\Omega)$, et à partir du Corollaire 3.1, μ est une bonne mesure.

■

On déduit le résultat suivant analogue à celui de Benilan-Brezis dans le cas du problème de Dirichlet (voir [6] , [16]) .

Corollaire 3.2. *Soit $a \in \partial\Omega$ et $\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, si $p \ge (N-1)/(N-2)$, alors le problème,*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1}\,u = \gamma\delta_a \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.13}$$

n'admet pas de solution.

Preuve : On commence par le cas où γ est strictement positive .

Rappelons que pour un ensemble borélien $E \subset \partial\Omega$,

$$\int_E d(\gamma\delta_a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin E, \\ \gamma & \text{si } a \in E. \end{cases}$$

D'un autre côté, pour $a \in \partial\Omega$,

$$C_{1,p'}(\{a\}) = 0 \iff p \geq \frac{N-1}{N-2}.$$

Donc, lorsque $p \geq (N-1)/(N-2)$, l'ensemble borélien $\{a\}$ a une capacité $C_{1,p'}$ nulle, par contre $(\gamma\delta_a)(\{a\}) = \gamma \neq 0$. Par application du Théorème 3.2 on conclut que le problème (3.13) n'admet pas de solution.

Si le problème (3.13) admet une solution u, pour γ strictement négative, alors $v = -u$ est une solution du problème (3.13) pour $\mu = -\gamma\delta_a$, ce qui contredit le premier cas.

$\square$

Remarque 3.2. *:*

1) *Le résultat du Théorème 3.2 est compatible avec celui du Théorème 2.1 dans le cas où $g(u) = |u|^{p-1}u$, en effet , pour $1 < p < (N-1)/(N-2)$ seul l'ensemble vide a une capacité $C_{1,p'}$ nulle, et donc toute mesure est absolument continue par rapport à la capacité $C_{1,p'}$.*

2) *Le résultat d'existence du Théorème 3.2 reste valable si μ est une mesure signée tel que sa variation totale $|\mu|$ est diffuse, i.e. $|\mu| << C_{1,p'}$. Par contre si μ est une bonne mesure signée, il n'est pas clair que $|\mu| << C_{1,p'}$. Un problème ouvert liée est annoncée dans [20].*

3.3 Singularités éliminables

Théorème 3.3. *On suppose $N \geq 3$. On considère $p \geq (N-1)/(N-2)$ et $a \in \partial\Omega$. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{a\})$ une solution positive de,*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + u^p = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \setminus \{a\}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Alors $u = 0$.

Preuve :

Sans perte de généralité on prend $a = 0$.

On note $C_0 = \{\xi \in C^{1,1}(\overline{\Omega}) : 0$ n'appartient pas au support de $\xi\}$.

Le sens qu'on va donner à l'équation (3.14) est le suivant,

$$(\forall \xi \in C_0) \quad \int_\Omega u\,(-\Delta\xi + \xi)\,dx = -\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\xi}{\partial n} + \xi\, u^p\right) dS. \tag{3.15}$$

Soit $\epsilon \in (0,1]$, $k = max\{p', 2\}$, $\eta_\epsilon \in C^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ tel que $0 \leq \eta_\epsilon \leq 1$, et

$$\eta_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } |x| \leq \epsilon, \\ \\ 1 \quad \text{si } |x| \geq 2\epsilon, \end{cases}$$

et $|\nabla\eta_\epsilon| \leq m\epsilon^{-1}$, $|D^2(\eta_\epsilon)| \leq m\epsilon^{-2}$, où $|D^2(.)|$ dénote le déterminant Jacobien .

<u>*Étape 1*</u> : $u^p \in L^1(\partial\Omega)$?

$$\Delta\eta_\epsilon^k = k\eta_\epsilon^{k-1}\Delta\eta_\epsilon + k(k-1)\eta_\epsilon^{k-2}\,|\nabla\eta_\epsilon|^2.$$

Utilisons η_ϵ^k comme fonction test dans l'équation (3.14),

$$\int_\Omega (-k(k-1)\eta_\epsilon^{k-2}|\nabla\eta_\epsilon|^2 - k\eta_\epsilon^{k-1}\Delta\eta_\epsilon + \eta_\epsilon^k)u\,dx = -\int_{\partial\Omega}\left(u^p\eta_\epsilon^k + k\eta_\epsilon^{k-1}\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial n}u\right)dS. \tag{3.16}$$

On a,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial\Omega}\eta_\epsilon^{k-1}\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial n}u\,dS\right| &= \left|\int_{\partial\Omega}\left(\eta_\epsilon^{\frac{k}{p}}\,u\right)\left(\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial n}\,\eta_\epsilon^{\frac{k}{p'}-1}\right)dS\right|,\\
&\leq \left(\int_{B_{2\epsilon}\cap\partial\Omega}u^p\eta_\epsilon^k\,dS\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B_{2\epsilon}\cap\partial\Omega}\eta_\epsilon^{k-p'}\left|\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial n}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},\\
&\leq mc_N\epsilon^{\frac{N-1}{p'}-1}\left(\int_{B_{2\epsilon}\cap\partial\Omega}u^p\eta_\epsilon^k\,dS\right)^{\frac{1}{p}},\\
&\leq mc_N\left(\int_{B_{2\epsilon}\cap\partial\Omega}u^p\eta_\epsilon^k\,dS\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

avec, c_N dénote une certaine constante indéterminé qui dépend de N.

Puisque la fonction u est positive, et elle vérifie $\mathbb{L}u = 0$, avec $\mathbb{L} := -\Delta + I_d$, alors elle coïncide au bord avec une mesure de Radon positive λ ([37], Théorème 2.13) , ce qui implique que u appartient à $M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$, en particulier $u \in L^1(\Omega)$.

Par la suite,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta_\epsilon^{k-2}|\nabla\eta_\epsilon|^2\,u\,dx &\leq \int_{B_{2\epsilon}\cap\Omega}|\nabla\eta_\epsilon|^2\,u\,dx,\\
&\leq \frac{m^2}{\epsilon^2}\int_{B_{2\epsilon\cap\Omega}}u\,dx,\\
&\leq \frac{m^2}{\epsilon^2}\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}}\left(\int_{B_{2\epsilon\cap\Omega}}dx\right)^{\frac{2}{N}},\\
&\leq c_N m^2\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}}.
\end{aligned}$$

D'une manière similaire,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta_\epsilon^{k-1}|\Delta\eta_\epsilon|\,u\,dx &\leq \int_{B_{2\epsilon}\cap\Omega}|\Delta\eta_\epsilon|\,u\,dx,\\
&\leq \frac{m}{\epsilon^2}\int_{B_{2\epsilon\cap\Omega}}u\,dx,\\
&\leq c_N m\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}}.
\end{aligned}$$

Appliquons les estimations précédentes à (3.16),

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}u^p\eta_\epsilon^k\,dS - mc_N\left(\int_{B_{2\epsilon}\cap\partial\Omega}u^p\eta_\epsilon^k\,dS\right)^{\frac{1}{p}} &\leq c_N\,k^2(m^2+m)\,\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}} + \int_\Omega u\,dx,\\
&\leq C_N < \infty.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Posons $t = \left(\int_{\partial\Omega}u^p\eta_\epsilon^k\,dS\right)^{\frac{1}{p}}$, la fonction à variable positive $t \mapsto t^p - (mc_N)\,t$, ne peut être majorée que si t est bornée. C'est à dire la quantité $\left(\int_{\partial\Omega}u^p\eta_\epsilon^k\,dS\right)^{\frac{1}{p}}$ est bornée indépendamment de ϵ.

Enfin, par application du lemme de Fatou à l'estimation (3.17), on conclut,

$$\int_{\partial\Omega} u^p \, dS \leq c_N (m^2 + m) \, \|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}} + \int_{\Omega} u \, dx. \tag{3.18}$$

<u>*Étape 2*</u> : Éliminabilité

Pour $\xi \in \mathcal{C}_\Omega$, multiplions l'équation (3.14) par la fonction test $(\eta_\epsilon^k \xi)$,

$$\int_{\Omega} (-\xi \Delta \eta_\epsilon^k - 2\nabla\xi . \nabla\eta_\epsilon^k + (-\Delta\xi + \xi)\eta_\epsilon^k) \, u \, dx = -\int_{\partial\Omega} \left(u^p \eta_\epsilon^k \xi + \xi \frac{\partial \eta_\epsilon^k}{\partial n} u \right) dS. \tag{3.19}$$

Puisque le support de $|\nabla \eta_\epsilon^k|$ est inclut dans $B_{2\epsilon}$ et $u \in L^p(\partial\Omega)$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\partial\Omega} \left(u^p \eta_\epsilon^k \xi + \xi \frac{\partial \eta_\epsilon^k}{\partial n} u \right) dS = \int_{\partial\Omega} u^p \xi \, dS.$$

Comme

$$|\nabla\xi . \nabla\eta_\epsilon^k| = k\eta_\epsilon^{k-1} |\nabla\xi . \nabla\eta_\epsilon| \leq mk\epsilon^{-1} |\nabla\xi| \chi_{B_{2\epsilon} \cap \Omega},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla\xi . \nabla\eta_\epsilon^k| u \, dx &\leq mk\epsilon^{-1} \int_{\Omega \cap B_{2\epsilon}} |\nabla\xi| u \, dx, \\ &\leq c_N k \|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}} \|\nabla\xi\|_{L^\infty} \, \epsilon. \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\int_{\Omega} \xi u \Delta\eta_\epsilon^k \, dx = k \int_{\Omega \cap B_{2\epsilon}} (\eta_\epsilon \Delta\eta_\epsilon + (k-1)|\nabla\eta_\epsilon|^2) \eta_\epsilon^{k-2} \xi u \, dx. \tag{3.20}$$

La difficulté principale qu'on rencontre lors du passage à la limite $\epsilon \to 0$ dans (3.19) vient du terme (3.20). On spécifie η_ϵ sous la forme $\eta_\epsilon = \eta_1(\epsilon^{-1}x)$ où $\eta_1(x) = \inf\{1, (|x|-1)_+^2\}$.

De l'étape 1 on a,

$$\int_{\Omega \cap B_{2\epsilon}} (\eta_\epsilon \Delta\eta_\epsilon + (k-1)|\nabla\eta_\epsilon|^2) u \, dx \leq c_N k^2 (m^2 + m) \, \|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}}.$$

La fonction η_1 est convexe pour $|x| \leq 2$, donc $\Delta\eta_\epsilon \geq 0$ dans $B_{2\epsilon}$, par conséquent, $\eta_\epsilon \Delta\eta_\epsilon + (k-1)|\nabla\eta_\epsilon|^2 \geq 0$ dans $B_{2\epsilon}$. Supposons que,

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega \cap B_{2\epsilon}} (\eta_\epsilon \Delta\eta_\epsilon + (k-1)|\nabla\eta_\epsilon|^2) \eta_\epsilon^{k-2} u \, dx = \alpha > 0.$$

Cette limite est atteinte par une sous suite $\{\epsilon_j\}_j$, puisque $\xi(x) = \xi(0) + \psi(x)$ pour $\psi = \mathcal{O}(|x|)$; on a d'abord

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap B_{2\epsilon}} (\eta_{\epsilon_j} \Delta\eta_{\epsilon_j} + (k-1)|\nabla\eta_{\epsilon_j}|^2) \eta_\epsilon^{k-2} \, |\psi| \, u \, dx &\leq c_N m \epsilon^{-2} \int_{B_{2\epsilon} \cap \Omega} |x| u \, dx, \\ &\leq 2c_N m \epsilon^{-1} \int_{B_{2\epsilon} \cap \Omega} u \, dx, \\ &\leq c_N m \epsilon^{-1} \|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}} \left(\int_{B_{2\epsilon} \cap \Omega} dx \right)^{\frac{2}{N}}, \\ &\leq c_N m \|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}} \, \epsilon. \end{aligned}$$

Ce qui implique,

$$\lim_{\epsilon_j\to 0}\int_{\Omega\cap B_{2\epsilon_j}}(\eta_{\epsilon_j}\Delta\eta_{\epsilon_j}+(k-1)|\nabla\eta_{\epsilon_j}|^2)\eta_{\epsilon_j}^{k-2}\xi u\,dx=\alpha\,\xi(0).$$

Faisons tendre ϵ_j vers 0 dans la formule (3.19) on déduit,

$$\int_\Omega(-\Delta\xi+\xi)u\,dx\;+\;\int_{\partial\Omega}u^p\xi=k\,\alpha\,\xi(0).$$

Ce qui veut dire que u est la solution du problème (3.2) pour $\mu=k\,\alpha\,\delta_0$, ce qui contredit le Corollaire 3.2.

Par conséquent, $\alpha=0$ et

$$(\forall\xi\in\mathcal{C}_\Omega)\quad\int_\Omega u(-\Delta\xi\;+\;\xi)\,dx\;+\;\int_{\partial\Omega}u^p\xi\,dS=0.$$

Donc, u est solution du problème (3.2) pour $\mu=0$. Par unicité $u=0$.

■

Un résultat plus fort d'éliminabilité est possible.

Théorème 3.4. *Supposons $p\geq\frac{N-1}{N-2}$. Soit K un compact inclus dans $\partial\Omega$ et $u\in C^2(\overline{\Omega}\setminus K)$ une solution positive de,*

$$\begin{cases}-\Delta u\;+u=0\quad dans\quad\Omega\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\;+\;u^p=0\quad sur\quad\partial\Omega\setminus K.\end{cases}\tag{3.21}$$

Si $C_{1,p'}(K)=0$ alors $u=0$.

Preuve :

La fonction u est positive et elle vérifie $(-\Delta+I)\,u=0$ dans Ω, par le théorème de Doob-Herglotz, la trace de u sur le bord est une mesure de Radon positive ([37], Théorème 2.13, aussi [29] Théorème 1.4.1), ceci entraîne que $u\in M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)=L^{\frac{N}{N-2},\infty}(\Omega)$.

Soient $\eta\in C^1(\partial\Omega)$ tel que $0\leq\eta\leq 1$, $\eta=1$ dans un voisinage de K et $\tilde{\eta}=1-\eta$. On note $\xi:=\mathbb{P}^k[\tilde{\eta}]=\mathbb{P}^k_{\tilde{\eta}}$, pour un réel k qu'on va le préciser par la suite. À partir de la formule de représentation de Poisson, il est facile de voir que $\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}=1-\mathbb{P}_\eta$, prenons ξ comme fonction test dans l'équation (3.21),

$$-k(k-1)\int_\Omega\mathbb{P}^{k-2}_{\tilde{\eta}}|\nabla\mathbb{P}_\eta|^2u\,dx\;+\;\int_\Omega\mathbb{P}^k_{\tilde{\eta}}u\,dx=-\int_{\partial\Omega}\left(\tilde{\eta}^k\,u^p\;+\;k\tilde{\eta}^{k-1}\,\frac{\partial\mathbb{P}_{\tilde{\eta}}}{\partial n}u\,dS\right).\tag{3.22}$$

On note maintenant $\mathbb{L}$ l'opérateur de Dirichlet vers Neumann défini dans le Lemme 3.1, si on prend $k\geq p^{'}$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Omega}\tilde{\eta}^{k-1}\mathbb{L}_{\tilde{\eta}}\,u\,dS\right|&\leq\left(\int_{\partial\Omega}\tilde{\eta}^ku^p\,dS\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\partial\Omega}\tilde{\eta}^{k-p^{'}}|\mathbb{L}_\eta|^{p^{'}}\,dS\right)^{\frac{1}{p^{'}}},\\&\leq\left(\int_{\partial\Omega}\tilde{\eta}^ku^p\,dS\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\partial\Omega}|\mathbb{L}_\eta|^{p^{'}}\,dS\right)^{\frac{1}{p^{'}}},\\&\leq C_1\left(\int_{\partial\Omega}\tilde{\eta}^ku^p\,dS\right)^{\frac{1}{p}}\|\eta\|_{W^{1,p^{'}}(\partial\Omega)}\quad\text{(estimation (3.7))}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_\Omega \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^k u\,dx + \int_{\partial\Omega} \tilde{\eta}^k u^p\,dS - C_1 \|\eta\|_{W^{1,p'}(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\eta}^k u^p\,dS\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq k(k-1)C_2 \|u\|^*_{L^{\frac{N}{N-2},\infty}} \left\| |\nabla \mathbb{P}_\eta|^2 \right\|^*_{L^{\frac{N}{2},1}(\Omega)},$$
$$\leq k(k-1)C_3 \|u\|^*_{L^{\frac{N}{N-2},\infty}} (\|\nabla \mathbb{P}_\eta\|^*_{L^{N,1}})^2. \tag{3.23}$$

La dernière inégalité se déduit en combinant les deux estimations,

$$\left\| |\nabla \mathbb{P}_\eta|^2 \right\|^*_{L^{\frac{N}{2},1}} = (\|\nabla \mathbb{P}_\eta\|^*_{L^{N,2}})^2,$$

et,

$$\|\nabla \mathbb{P}_\eta\|^*_{L^{N,2}} \leq C \|\nabla \mathbb{P}_\eta\|^*_{L^{N,1}} \quad \text{(Rappelons que } L^{p,q_1} \subset L^{p,q_2} \quad \text{si } q_1 \leq q_2 \text{).}$$

À noter que $p \geq (N-1)/(N-2)$ entraîne $1 < p' \leq N-1$. On a les équivalences suivantes,

$$\|\nabla \mathbb{P}_\eta\|^*_{L^{N,1}} \equiv \left\| (-\Delta')^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}_\eta \right\|^*_{L^{N,1}} \equiv \|\eta\|_{B_1^{1-\frac{1}{N},N}}.$$

(Précisons que le sens de $A \equiv B$ est : $(\exists C > 0)\ C^{-1}A \leq B \leq CA$).

Ainsi, on peut réécrire l'estimation (3.23) comme suite,

$$\int_\Omega \mathbb{P}_{\tilde{\eta}}^k u\,dx + \int_{\partial\Omega} \tilde{\eta}^k u^p\,dS - C_1 \|\eta\|_{W^{1,p'}(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} \tilde{\eta}^k u^p\,dS\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq k(k-1)C_4 \|u\|^*_{L^{\frac{N}{N-2},\infty}} \left(\|\eta\|_{B_1^{1-\frac{1}{N},N}(\partial\Omega)}\right)^2. \tag{3.24}$$

Le terme de droite de l'inégalité précédente est indépendant de p. Par un résultat de J.Malý, l'injection de $B_1^{1-\frac{1}{N},N}(\partial\Omega)$ dans $C(\partial\Omega)$ est continue. Par conséquent, un point a une capacité-$B_1^{1-\frac{1}{N},N}$ strictement positive, ce qui entraîne que le terme à droite de (3.24) ne tendra jamais vers 0. Ensuite, si on note $X := \int_{\partial\Omega} \tilde{\eta}^k u^p\,dS$, alors on conclut que X est bornée.

Finalement, si $C_{1,p'}(K) = 0$, alors dans (3.22) on considère une famille des fonctions η_n qui satisfait les hypothèses précédentes, et tel qu'on a η_n converge vers 0 dans $W^{1,p'}(\partial\Omega)$, Ceci entraîne que $u = 0$.

■

Remarque 3.3. *:*

1) *Remarquez que les deux théorèmes précédents n'ont pas eu besoin d'une estimation a-priori sur la solution. Par contre, ils sont limités aux solutions positives.*

2) *Le résultat du Théorème 3.4 affirme que tout les compacts K à capacité $C_{1,p'}$ nulle sont éliminable pour l'équation (3.21). Par contre, on ne sait pas si cette condition est nécessaire.*

Chapitre 4

Classification des singularités isolées

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier les singularités isolées de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \ \ dans \ \ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1} u = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega \backslash \{a\}, \end{cases} \tag{4.1}$$

où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, a est un point de $\partial\Omega$ et l'exposant p est sous critique (c'est à dire $1 < p < p_c$). On peut éventuellement prendre le point a comme étant l'origine 0.

L'objectif principale de ce chapitre est de montrer que le problème (4.1) admet des singularités non éliminables lorsque $1 < p < (N-1)/(N-2)$ et nous allons décrire plus loin le comportement de la fonction u au voisinage du point singulier a.

4.2 Solutions singulières particulières

On commence par l'étude de l'équation,

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \ \ dans \ \ \mathbb{R}^N_+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + |u|^{p-1} u = 0 \ \ sur \ \ \partial\mathbb{R}^N_+ \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Si u est une solution de l'équation (4.2) alors pour $k > 0$ la fonction,

$$u_k(x) := k^{\frac{1}{p-1}} u(kx) \tag{4.3}$$

est aussi une solution.

On note (r, σ) les coordonnés sphériques dans l'espace $\mathbb{R}^N$, et par Δ_S l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère S^{N-1}. Rappelons tout d'abord quelques passages utiles entre les coordonnées sphériques et les coordonnés cartésiennes dans $\mathbb{R}^N$,

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \nabla_s u, \quad \text{où } e_r = \frac{x}{|x|},$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(N-1)}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_S u.$$

Cherchons des solutions particulières de (4.2) sous la forme,

$$u(r,\sigma) = r^{-\frac{1}{(p-1)}}\,\omega(\sigma), \quad r>0, \sigma\in S_+^{N-1}. \tag{4.4}$$

Où la demi sphère $S_+^{N-1} = S^{N-1}\cap\mathbb{R}_+^N$ est paramétrée par,

$$S_+^{N-1} = \{x = (\sin\phi\,\sigma^{'}, \cos\phi) : \sigma^{'}\in S^{N-2}, \phi\in[0,\frac{\pi}{2}]\}.$$

Ainsi, la fonction ω vérifie l'équation,

$$\begin{cases} \Delta_S\omega \,+\, l_{p,N}\omega = 0 \quad dans \quad S_+^{N-1}, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\phi} \,+\, |\omega|^{p-1}\,\omega = 0 \quad sur \quad S^{N-2}(=\partial S_+^{N-1}), \end{cases} \tag{4.5}$$

avec $l_{p,N} = \left(\dfrac{1}{p-1}\right)\left(\dfrac{1}{p-1}+2-N\right)$.

On dénote par $\mathcal{E}$ l'ensemble de solutions de (4.5), et par $\mathcal{E}_+$ le sous ensemble des solutions positives. Les solutions de (4.5) sont les points critiques du fonctionnelles,

$$J_p(v) = \frac{1}{2}\int_{S_+^{N-1}}\left(|\nabla_S v|^2 - l_{p,N}v^2\right)dS(\sigma) \,+\, \frac{1}{p+1}\int_{S^{N-2}}|v|^{p+1}\,dS(\sigma^{'}), \tag{4.6}$$

Définie sur $H^1(S_+^{N-1})\cap L^{p+1}(\partial S_+^{N-1})$.

Lorsque $p\geq (N-1)/(N-2)$ alors $l_{p,N}\leq 0$, par conséquent le minimum du fonctionnelle J_p est zéro. En effet, en multipliant l'équation (4.5) par ω et en intégrant sur S_+^{N-1} ,

$$\int_{S_+^{N-1}}\left(|\nabla_s\omega|^2 - l_{p,N}\omega^2\right)dS(\sigma) \,+\, \int_{S^{N-2}}|\omega|^{p+1}\,dS(\sigma^{'}) = 0.$$

Ce qui implique que $\mathcal{E} = \{0\}$.

Maintenant, on note ψ_1 la première fonction propre de $-\Delta_S$ dans $H_0^1(S_+^{N-1})$; renormalisé au sens que $\max\psi_1 = 1$ et $\Lambda_1 = N-1$ la première valeur propre associée. En utilisant ψ_1 comme fonction test dans le problème (4.5) on obtient,

$$\int_{S_+^{N-1}}(\Lambda_1 - l_{p,N})\,\omega\,\psi_1\;dS(\sigma) \,+\, \int_{S^{N-2}}\omega\,\frac{\partial\psi_1}{\partial\phi}\;dS(\sigma^{'}) = 0.$$

Si $\Lambda_1\leq l_{p,N}$ et puisque $\frac{\partial\psi_1}{\partial\phi}<0$ sur S^{N-2}, alors il n'existe pas de solution positive à (4.5) autre que 0. Cette condition sur p est équivalente à $p\leq N/(N-1)$. Noter que la condition au bord sur la solution ω n'a pas jouer un rôle dans ce résultat de non-existence, seulement la positivité de ω et le fait que $l_{p,N}\geq\Lambda_1$.

Finalement, si $N/(N-1) < p < (N-1)/(N-2)$, alors il existe une solution minimisante qui est une fonction qui dépend de la variable ϕ. Prouvons maintenant l'existence d'une telle fonction $v = v(\phi)$ qui est solution de (4.5).

Rappelons l'inégalité de Poincaré sur l'espace $H_0^1(S_+^{N-1})$,

$$(\forall v\in H_0^1(S_+^{N-1}))\quad \int_{S_+^{N-1}} v^2\,dS(\sigma) \leq \frac{1}{\Lambda_1}\int_{S_+^{N-1}}|\nabla_S v|^2\,dS(\sigma).$$

Si une fonction $\tilde{v} = \tilde{v}(\phi)\in H^1(S_+^{N-1})\cap L^{p+1}(S^{N-2})$ est nulle sur S^{N-2}, on déduit à partir de l'inégalité de Poincaré,

$$J_p(\tilde{v}) \geq \frac{\Lambda_1 - l_{p,N}}{2}\int_{S_+^{N-1}}\tilde{v}^2\,dS(\sigma) \geq 0.$$

Si $v(\frac{\pi}{2}) = \alpha > 0$, écrivons $v = \tilde{v} + \alpha$, ainsi,

$$\begin{aligned} J_p(v) &= \frac{1}{2}\int_{S_+^{N-1}} (|\nabla_S \tilde{v}|^2 - l_{p,N}\tilde{v}^2)\, dS(\sigma) - \frac{l_{p,N}\alpha^2|S^{N-1}|}{4} - \alpha\, l_{p,N}\int_{S_+^{N-1}} \tilde{v}\, dS(\sigma) \, + \, \frac{|S^{N-2}|}{p+1}|\alpha|^{p+1}, \\ &\geq \frac{\Lambda_1 - l_{p,N}(1+\epsilon)}{2}\int_{S_+^{N-1}} \tilde{v}^2\, dS(\sigma) - \boldsymbol{\alpha^2} l_{p,N}|S^{N-1}|\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\epsilon}\Big) + \frac{|S^{N-2}|}{p+1}|\alpha|^{\mathbf{p+1}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

$\Big($On utilise l'inégalité suivante de Young avec un paramètre, $|a.b| \leq \frac{\epsilon}{2}\, a^2 + \frac{b^2}{2\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0\Big)$.

On prend $\epsilon = \frac{\Lambda_1}{l_{p,N}} - 1$, ainsi le terme minorant dans (4.7) ne dépend que de α, on minimise ce terme par rapport à α, on conclut que la fonctionnelle J_p dans la classe des fonctions dépendants que de ϕ est bornée inférieurement. Maintenant pour $v = v(\phi) = \alpha$,

$$J_p(v) = -\frac{l_{p,N}\alpha^2|S^{N-1}|}{4} \, + \, \frac{|S^{N-2}||\alpha|^{p+1}}{p+1}.$$

Si α est proche de zéro, alors J_p est négative, on déduit que l'énergie au point minimal est strictement négative, ce qui entraîne que le minimum ω de J_p est non identiquement nulle.

En résumé, on a montré que si

$$\frac{N}{N-1} < p < \frac{N-1}{N-2}, \tag{4.8}$$

l'équation (4.5) admet une solution $\omega := \omega(\phi)$ non identiquement nulle et positive.

Le prochain résultat affirme que, le problème (4.5) admet uniquement trois solutions dans le cas où p vérifie (4.8), donc nécessairement $\mathcal{E}$ est réduit à $\{0, \omega, -\omega\}$, où ω est la fonction qu'on a construit précédemment.

Théorème 4.1. *Supposons que la condition (4.8) est vérifiée, alors le problème (4.5) admet uniquement trois solutions.*

Preuve : On écrit l'équation (4.5) en coordonnées sphériques $(\phi, \sigma') \in (0, \frac{\pi}{2}) \times S^{N-2}$,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin^{N-2}\phi}(\sin^{N-2}\phi\, \omega_\phi)_\phi \, + \, \dfrac{1}{\sin^2\phi}\Delta_{S^{N-2}}\omega \, + \, l_{p,N}\omega = 0 \;\; dans \;\; (0, \dfrac{\pi}{2}) \times S^{N-2}, \\ \omega_\phi \, + \, |\omega|^{p-1}\omega = 0 \;\; sur \;\; \{\dfrac{\pi}{2}\} \times S^{N-2}. \end{cases} \tag{4.9}$$

La mesure invariante de $SO(N)$ sur S^{N-1} est $dS = \sin^{N-2}\phi\, dS' d\phi$. Soit

$$\overline{\omega}(\phi) = \frac{1}{|S^{N-2}|}\int_{S^{N-2}} \omega(\phi, \sigma')\, dS'.$$

En prenant la moyenne au sens précédent de deux membres de l'équation (4.9), on conclut que $\overline{\omega}$ vérifie,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin^{N-2}\phi}(\sin^{N-2}\phi\, \overline{\omega}_\phi)_\phi \, + \, l_{p,N}\overline{\omega} = 0 \;\; dans \;\; (0, \dfrac{\pi}{2}), \\ \overline{\omega}_\phi \, + \, \overline{|\omega|^{p-1}\omega} = 0 \;\; pour \;\; \phi = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{4.10}$$

En prenant la différence entre les deux équations précédentes vérifient par ω et $\overline{\omega}$ respectivement et en multipliant l'équation résultante par $(\omega - \overline{\omega})$ on obtient,

$$-\int_{S_+^{N-1}} |\nabla_S(\omega - \overline{\omega})|^2\, dS \, + \, l_{p,N}\int_{S_+^{N-1}} (\omega - \overline{\omega})^2\, dS = \int_{S^{N-2}} \Big(\omega|\omega|^{p-1} - \overline{\omega|\omega|^{p-1}}\Big)(\omega - \overline{\omega})\, dS'. \tag{4.11}$$

On a,

$$
\begin{aligned}
\int_{S^{N-2}} \left(\omega|\omega|^{p-1} - \overline{\omega|\omega|^{p-1}}\right)(\omega - \overline{\omega})\, dS' &= \int_{S^{N-2}} \left(\omega|\omega|^{p-1} - \overline{\omega}|\overline{\omega}|^{p-1}\right)(\omega - \overline{\omega})\, dS' \\
&+ \int_{S^{N-2}} \left(\overline{\omega}|\overline{\omega}|^{p-1} - \overline{\omega|\omega|^{p-1}}\right)(\omega - \overline{\omega})\, dS', \\
&= \int_{S^{N-2}} \left(\omega|\omega|^{p-1} - \overline{\omega}|\overline{\omega}|^{p-1}\right)(\omega - \overline{\omega})\, dS' \\
&+ \left(\overline{\omega}|\overline{\omega}|^{p-1} - \overline{\omega|\omega|^{p-1}}\right)(\,|S^{N-2}|\,\overline{\omega} - \,|S^{N-2}|\,\overline{\omega}), \\
&= \int_{S^{N-2}} \left(\omega|\omega|^{p-1} - \overline{\omega}|\overline{\omega}|^{p-1}\right)(\omega - \overline{\omega})\, dS'.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
-\int_{S_+^{N-1}} |\nabla_S(\omega - \overline{\omega})|^2\, dS \,+\, l_{p,N} \int_{S_+^{N-1}} (\omega - \overline{\omega})^2\, dS &= \int_{S^{N-2}} \left(\omega|\omega|^{p-1} - \overline{\omega}|\overline{\omega}|^{p-1}\right)(\omega - \overline{\omega})\, dS', \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{S^{N-2}} |\omega - \overline{\omega}|^{p+1}\, dS'. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Étape 1 :

On prouve l'inégalité suivante de type Poincaré-Wirtinger

$$
\int_{S_+^{N-1}} |\nabla_S(\omega - \overline{\omega})|^2\, dS \geq (N-1) \int_{S_+^{N-1}} (\omega - \overline{\omega})^2\, dS. \qquad (4.13)
$$

On commence par prouver,

$$
\int_{S_+^{N-1}} |\nabla_S Z|^2\, dS \geq (N-1) \int_{S_+^{N-1}} Z^2\, dS \quad \forall Z \in H_a^1(S_+^{N-1}), \qquad (4.14)
$$

où $H_a^1(S_+^{N-1})$ dénote,

$$
H_a^1(S_+^{N-1}) := \left\{ w \in H^1(S_+^{N-1}) : \int_{S^{N-2}} w(\phi, \sigma')\, dS' = 0 \;\; \forall \phi \in (0, \frac{\pi}{2}) \right\}.
$$

On rappelle que

$$
\nabla_S w = w_\phi \mathbf{e} \,+\, \frac{1}{sin\phi} \nabla_{S'} w,
$$

où $\mathbf{e}$ désigne le vecteur tangent à S^{N-1} au point (ϕ, σ') dans la direction du méridien vis à vis l'angle ϕ.

Pour $w \in H_a^1(S_+^{N-1})$ on a

$$
\int_{S^{N-2}} w_\phi(\phi, \sigma')\, dS' = 0 \quad \forall \phi \in (0, \frac{\pi}{2}).
$$

En plus,

$$
\frac{1}{\sin\phi} \int_{S^{N-2}} \nabla_{S'} w(\phi, \sigma')\, dS' = 0 \;\; \forall \phi \in (0, \frac{\pi}{2}). \qquad (4.15)
$$

Donc,

$$
\int_{S^{N-2}} \nabla_S w(\phi, \sigma')\, dS' = 0 \;\; \forall \phi \in (0, \frac{\pi}{2}). \qquad (4.16)
$$

L'espace $H_a^1(S_+^{N-1})$ est un sous espace fermé de $H^1(S_+^{N-1})$. Soit $\xi \in (H_a^1(S_+^{N-1}))^\perp$, alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{S^{N-2}} w(\phi,\sigma^{'})\xi(\phi,\sigma^{'}) \sin^{N-2}\phi \, dS^{'} d\phi = 0 \quad \forall w \in H_a^1(S_+^{N-1}).$$

Pour $j = 1, 2$ soit $\sigma_j = (\phi, \sigma_j^{'}) \in (0, \frac{\pi}{2}) \times S^{N-2}$ deux points de Lebesgue de $\xi(\phi, \sigma^{'})$ et soient $\{w_n\}$ une suite de fonctions de $C^1(S_+^{N-1})$ telle que support(w_n)= $(\overline{B}_{\epsilon_n}(\sigma_1) \cup \overline{B}_{\epsilon_n}(\sigma_2)) \cap S_+^{N-1}$, $B_{\epsilon_n}(\sigma_1) \cap B_{\epsilon_n}(\sigma_2) = \emptyset$, $w_n\lfloor_{B_{\epsilon_n}(\sigma_1)\cap S_+^{N-1}} > 0$, $w_n\lfloor_{B_{\epsilon_n}(\sigma_2)\cap S_+^{N-1}} < 0$, où ϵ_n une suite de nombres positifs qui converge vers 0 et

$$\int_{B_{\epsilon_n}(\sigma_1)\cap S_+^{N-1}} w_n(\phi,\sigma^{'}) \, dS^{'} = 1, \int_{B_{\epsilon_n}(\sigma_2)\cap S_+^{N-1}} w_n(\phi,\sigma^{'}) \, dS^{'} = -1.$$

Géométriquement, on pourra obtenir $w_n\lfloor_{B_{\epsilon_n}(\sigma_2)\cap S_+^{N-1}}$ à partir de $w_n\lfloor_{B_{\epsilon_n}(\sigma_1)\cap S_+^{N-1}}$ en multipliant ce dernier par -1 puis en effectuant une rotation sur la sphère méridienne S^{N-2} qui relit les deux points σ_1 et σ_2 dans S_+^{N-1}. Il est clair que $w_n \in H_a^1(S_+^{N-1})$ et

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{S^{N-2}} w_n(\phi,\sigma^{'})\xi(\phi,\sigma^{'}) \sin^{N-2}\phi \, dS^{'} d\phi, \\ &= \xi(\phi,\sigma_1^{'}) - \xi(\phi,\sigma_2^{'}). \end{aligned}$$

Ce qui implique que la fonction ξ ne dépend que de la variable ϕ. Inversement, si $\xi(\phi,\sigma^{'}) = \xi(\phi)$, alors

$$\int_{S_+^{N-1}} w\xi \, dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{S^{N-2}} w(\phi,\sigma^{'}) \, dS^{'} \right) \xi(\phi) \, \sin^{N-2}\phi \, d\phi = 0 \;\; \forall w \in H_a^1(S_+^{N-1}).$$

Ceci entraîne que $(H_a^1(S_+^{N-1}))^\perp$ est le sous espace de $H^1(S_+^{N-1})$ des fonctions qui ne dépend que de la variable ϕ.

Considérons l'extension par réflexion des fonctions de $H_a^1(S_+^{N-1})$ définie de la manière suivante,

$$\tilde{w}(\phi,\sigma^{'}) = \begin{cases} w(\phi,\sigma^{'}) & \text{si } (\phi,\sigma^{'}) \in (0,\frac{\pi}{2}) \times S^{N-2} \;, \\ w(\pi-\phi,\sigma^{'}) & \text{si } (\phi,\sigma^{'}) \in (\frac{\pi}{2},\pi) \times S^{N-2}. \end{cases} \tag{4.17}$$

Il est immédiat que,

$$\int_{S^{N-2}} \tilde{w}(\phi,\sigma^{'}) \, dS^{'} = 0 \;\; \forall \phi \in (0,\pi). \tag{4.18}$$

En plus $\tilde{w} \in H^1(S^{N-1})$, on dénote $H_a^1(S^{N-1})$ le sous espace de $H^1(S^{N-1})$ des fonctions qui satisfaisaient (4.18). On peut réécrire l'espace $H_a^1(S^{N-1})$ comme suit,

$$H_a^1(S^{N-1}) = \left\{ w \in H^1(S^{N-1}) : \int_0^{\pi} \left(\int_{S^{N-2}} w(\phi,\sigma^{'}) \, dS^{'} \right)^2 sin^{N-2}\phi \; d\phi = 0 \quad \forall \phi \in (0,\pi) \right\}.$$

Soit,

$$\mu = \inf \left\{ \int_{S^{N-1}} |\nabla_S w|^2 \, dS : w \in H_a^1(S^{N-1}) \right\}.$$

D'une manière équivalente,

$$\mu = \inf \left\{ \int_{S^{N-1}} |\nabla_S w|^2 \, dS : \int_0^{\pi} \left(\int_{S^{N-2}} w(\phi,\sigma^{'}) \, dS^{'} \right)^2 sin^{N-2}\phi \; d\phi = 0 \quad \forall \phi \in (0,\pi) \right\}.$$

Par compacité, cet infimum est atteint pour $w_0 \in H^1_a(S^{N-1}_+)$ et il existe un multiplicateur de Lagrange $\tilde{\mu}$, tel que

$$\int_{S^{N-1}} \nabla_S w_0.\nabla_S \xi \, dS = \tilde{\mu} \int_{S^{N-1}} w_0 \xi \, dS \quad \forall \xi \in H^1(S^{N-1}).$$

Donc $\tilde{\mu} = \mu$, et w_0 est une fonction propre de $-\Delta_S$ dans $H^1(S^{N-1})$ associée à la valeur propre μ. Puisque $w_0 \in H^1_a(S^{N-1})$, μ ne peut pas être la première valeur propre (sinon w_0 aura un signe constant). Par conséquent $\mu \geq N-1$. Finalement, pour $w \in H^1_a(S^{N-1}_+)$, et $\tilde{w}$ définie par (4.17), on a

$$2\int_{S^{N-1}_+} |\nabla_S w|^2 \, dS = \int_{S^{N-1}} |\nabla_S \tilde{w}|^2 \, dS \geq \mu \int_{S^{N-1}} \tilde{w}^2 \, dS = 2(N-1) \int_{S^{N-1}_+} w^2 \, dS.$$

D'où,

$$\int_{S^{N-1}_+} |\nabla_S Z|^2 \, dS \geq (N-1) \int_{S^{N-1}_+} Z^2 \, dS \quad \forall Z \in H^1_a(S^{N-1}_+). \tag{4.19}$$

Puisque $(\omega - \overline{\omega}) \in H^1_a(S^{N-1}_+)$, alors l'inégalité (4.13) est conséquence de cette dernière inégalité.

Étape 2 : Si $p > N/(N-1)$ alors la fonction ω solution de (4.5) dépends uniquement de ϕ.

Dans ce cas $l_{p,N} < N-1$, on déduit de l'estimation (4.12),

$$(l_{p,N} - (N-1)) \int_{S^{N-1}_+} (\omega - \overline{\omega})^2 \, dS \geq \frac{1}{2} \int_{S^{N-2}} |\omega - \overline{\omega}|^{p+1} \, dS'.$$

Donc $\omega = \overline{\omega}$ sur S^{N-2}, utilisant cela dans l'égalité (4.11), ceci implique

$$\int_{S^{N-1}_+} |\nabla_S (\omega - \overline{\omega})|^2 \, dS = l_{p,N} \int_{S^{N-1}_+} (\omega - \overline{\omega})^2 \, dS.$$

Puisque $N-1$ est la première valeur propre du $-\Delta_S$, l'égalité précédente ne peut avoir lieu que lorsque $\omega = \overline{\omega}$.

Étape 3 : Si ω est une solution de (4.5) alors ω a un signe constant.

D'après *l'étape 2*, $\omega = \omega(\phi)$ donc ω vérifie l'EDO,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin^{N-2}\phi}(\sin^{N-2}\phi \, \omega_\phi)_\phi + l_{p,N}\omega = 0 \quad dans \quad (0, \dfrac{\pi}{2}), \\ \omega_\phi(0) = 0 \ , \ (\omega_\phi + |\omega|^{p-1}\omega)(\dfrac{\pi}{2}) = 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

On suppose que $\omega(0) > 0$. Si ω change de signe dans $(0, \frac{\pi}{2}]$, il existe donc ϕ_0 tel que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin^{N-2}\phi}(\sin^{N-2}\phi \, \omega_\phi)_\phi + l_{p,N}\omega = 0 \quad dans \quad (0, \phi_0), \\ \omega_\phi(0) = 0 \ , \ \omega(\phi_0) = 0. \end{cases} \tag{4.21}$$

Si $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, alors la condition au bord dans (4.20) entraîne que ω est la première fonction propre associée au problème de Neumann (puisqu'elle est positive), ce qui contredit le fait que le premier espace propre est composé de constantes. Donc $\phi_0 < \frac{\pi}{2}$. La fonction $\psi(\phi) = \cos\phi$ est positive dans $(0, \frac{\pi}{2})$ et elle vérifie,

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\sin^{N-2}\phi}(\sin^{N-2}\phi \, \psi_\phi)_\phi = (N-1)\psi \quad dans \quad (0, \dfrac{\pi}{2}), \\ \psi_\phi(0) = 0 \ , \ \psi(\dfrac{\pi}{2}) = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

Utilisons la fonction ψ comme fonction test dans l'équation vérifiée par ω, on déduit

$$(\omega_\phi \psi - \psi_\phi \omega)(\phi_0) \sin^{N-2}(\phi_0) = (N-1-l_{p,N}) \int_0^{\phi_0} \psi\, \omega\, \sin^{N-2}\phi\, d\phi \geq 0.$$

On conclut alors,

$$\omega_\phi(\phi_0) \geq 0. \tag{4.23}$$

Or, on sait d'après le lemme de Hopf sur le bord que $\omega_\phi(\phi_0) < 0$, ce qui est contradictoire. Donc nécessairement $\omega > 0$ sur $(0, \frac{\pi}{2})$.

Étape 4 :

L'unicité se découle du résultat suivant.

Proposition 4.1. *Une solution positive de l'équation (4.5) est unique.*

Preuve :

Supposons que ω et $\tilde{\omega}$ sont deux solutions positives de l'équation (4.5), alors

$$\int_{S_+^{N-1}} \left(\frac{\Delta_S \omega}{\omega} - \frac{\Delta_S \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}} \right) (\omega^2 - \tilde{\omega}^2)\, dS(\sigma) = 0. \tag{4.24}$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}
A &= \int_{S_+^{N-1}} \left(\frac{\Delta_S \omega}{\omega} - \frac{\Delta_S \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}} \right) (\omega^2 - \tilde{\omega}^2)\, dS(\sigma),\\
&= \int_{S_+^{N-1}} (\omega \Delta_S \omega + \tilde{\omega} \Delta_S \tilde{\omega})\, dS(\sigma) - \int_{S_+^{N-1}} \left(\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}} \Delta_S \tilde{\omega} \;+\; \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega} \Delta_S \omega \right) dS(\sigma),\\
&= -\int_{S_+^{N-1}} \left[\left(\frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^2} + 1 \right) |\nabla_S \tilde{\omega}|^2 \;+\; \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{\omega^2} + 1 \right) |\nabla_S \omega|^2 - 2\omega\tilde{\omega} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) \nabla_S \omega \nabla_S \tilde{\omega} \right] dS(\sigma)\\
&- \int_{S^{N-2}} \omega^2 (\tilde{\omega}^{p-1} - \omega^{p-1}) + \tilde{\omega}^2 (\omega^{p-1} - \tilde{\omega}^{p-1})\, dS(\sigma'),\\
&= -\int_{S_+^{N-1}} \left(\frac{1}{\omega^2} \;+\; \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) |\omega \nabla_S \tilde{\omega} - \tilde{\omega} \nabla_S \omega|^2\, dS(\sigma)\\
&- \int_{S^{N-2}} (\omega^{p-1} - \tilde{\omega}^{p-1})\, (\omega^2 - \tilde{\omega}^2)\, dS(\sigma').
\end{aligned}$$

Donc on a prouvé que,

$$\begin{aligned}
\int_{S_+^{N-1}} \left(\frac{\Delta_S \omega}{\omega} - \frac{\Delta_S \tilde{\omega}}{\tilde{\omega}} \right) (\omega^2 - \tilde{\omega}^2)\, dS(\sigma) = &-\int_{S_+^{N-1}} \left(\frac{1}{\omega^2} \;+\; \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \right) |\omega \nabla_S \tilde{\omega} - \tilde{\omega} \nabla_S \omega|^2\, dS(\sigma)\\
&- \int_{S^{N-2}} (\omega^{p-1} - \tilde{\omega}^{p-1})\, (\omega^2 - \tilde{\omega}^2)\, dS(\sigma').
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Ce qui entraîne que $\omega = \tilde{\omega}$.

■

Remarque 4.1. *:*

(1) *Une étude approfondie de l'équation (4.5) dans un sous domaine de S^{N-1} est détaillée dans l'Appendice 5.1.*

(2) *Lorsque $1 < p \leq N/(N-1)$ il est toujours possible de construire une infinité de solutions qui changent de signe (voir Appendice 5.2).*

4.2.1 Cas particulier de la dimension deux

Lorsque $N = 2$, l'équation (4.5) devient,

$$\begin{cases} v^{''} + \left(\dfrac{1}{p-1}\right)^2 v = 0 \qquad \text{dans} \qquad (0,\pi), \\ -v^{'}(0) + \Big(|v|^{p-1}v\Big)(0) \ = 0, \\ v^{'}(\pi) + \Big(|v|^{p-1}v\Big)(\pi) = 0. \end{cases} \tag{4.26}$$

L'étude de la structure de l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de cette équation est complètement détaillée dans Appendix 5.3. On peut résumer cette étude par le théorème suivant.

Théorème 4.2. *Pour $p > 1$, l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions du problème (4.26) a la structure suivante :*

(i) Si $\dfrac{1}{p-1} \in \mathbb{N}$, alors 0 est l'unique solution du problème (4.26).

(ii) Si $\dfrac{1}{p-1} \notin \mathbb{N}$, alors le problème stationnaire (4.26) admet uniquement trois solutions $\{0, v, -v\}$ où v est une solution qui peut changer de signe pour $p > 1$, lorsque $p > 2$ la fonction v est la solution strictement positive .

4.3 Estimations sur la solution

On s'intéresse dans cette section aux estimations de singularités sur la solution u du problème (4.1) :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \ \ dans \ \ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} \ + |u|^{p-1}\, u = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega\backslash\{0\}, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de classe C^2 qui contient le point 0.

Ces estimations jouent un rôle cruciales pour la classification de singularités de ce problème.

4.3.1 À partir du bord vers l'intérieur

Théorème 4.3. *On considère Ω un domaine borné de classe C^2 tel que $0 \in \partial\Omega$. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ une solution de*

$$-\Delta u = 0 \ \ dans \ \ \Omega \tag{4.27}$$

Si u vérifie l'estimation suivante

$$|u(x)| \leq c_1 |x|^{-\alpha} \quad dans \ \ \partial\Omega\backslash\{0\}, \tag{4.28}$$

où $0 < \alpha < N-1$, alors

$$|u(x)| \leq c_2 |x|^{-\alpha} \quad dans \ \ \overline{\Omega} \setminus \{0\}. \tag{4.29}$$

Preuve :

Puisque $\alpha < N-1$ alors $u\lfloor_{\partial\Omega} \in L^1(\partial\Omega)$ et

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} P(x,y)\ u(y)\ dS(y), \tag{4.30}$$

où $P(.\,,\,.)$ désigne le noyau de Poisson dans Ω. Il est bien connu (voir [7]) que dans un domaine borné de classe C^2, il existe $c_3^{'} > 0$ et $c_3 > 0$ tel que

$$c_3^{'} \frac{d(x)}{|x-y|^N} \leq P(x,y) \leq c_3 \frac{d(x)}{|x-y|^N} \quad \forall (x,y) \in \Omega \times \partial\Omega, \tag{4.31}$$

où $d(x)$ désigne la distance de x par rapport au bord, ce qu'on peut le réécrire d'une manière équivalente,

$$P(x,y) = C_3(x,y) \frac{d(x)}{|x-y|^N} \quad \text{où} \quad c_3^{'} \leq C_3(x,y) \leq c_3 \quad \forall (x,y) \in \Omega \times \partial\Omega. \tag{4.32}$$

Ainsi,

$$|u(x)| \leq d(x) \int_{\partial\Omega} \frac{C_3(x,y)}{|x-y|^N \, |y|^\alpha} \, dS(y). \tag{4.33}$$

Soit $G_x = \{y \in \partial\Omega : |y| \leq 2^{-1}|x|\}$ et $G_x^c = \partial\Omega \setminus G_x = \{y \in \partial\Omega : |y| > 2^{-1}|x|\}$. Remarquons le fait que si $y \in G_x$ alors $2^{-1}|x| \leq |x-y|$ et que $G_x \subset B_{\frac{|x|}{2}}$. Donc

$$\begin{aligned} d(x) \int_{G_x} \frac{C_3(x,y)}{|x-y|^N \, |y|^\alpha} \, dS(y) &\leq c_3 \int_{G_x} \frac{dS(y)}{|x-y|^{N-1} \, |y|^\alpha}, \\ &\leq 2^{N-1} c_3 |x|^{1-N} \int_{B_{\frac{|x|}{2}} \cap \partial\Omega} \frac{dy}{|y|^\alpha}, \\ &\leq c_4 |x|^{1-N} \int_0^{c_5|x|} \frac{r^{N-2}\, dr}{r^\alpha}, \\ &\leq c_6 |x|^{-\alpha}, \end{aligned}$$

où $c_6 = c_6(\Omega, \alpha)$. Ensuite

$$\begin{aligned} d(x) \int_{G_x^c} \frac{C_3(x,y)}{|x-y|^N \, |y|^\alpha} \, dS(y) &\leq \frac{2^\alpha}{|x|^\alpha} d(x) \int_{G_x^c} \frac{C_3(x,y)\, dS(y)}{|x-y|^N}, \\ &\leq \frac{2^\alpha}{|x|^\alpha} \int_{\partial\Omega} P(x,y)\, dS(y), \\ &\leq \frac{2^\alpha}{|x|^\alpha}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_{\partial\Omega} \frac{C_3(x,y)\, dS(y)}{|x-y|^N \, |y|^\alpha} = \int_{G_x} \frac{C_3(x,y)\, dS(y)}{|x-y|^N \, |y|^\alpha} + \int_{G_x^c} \frac{C_3(x,y)\, dS(y)}{|x-y|^N \, |y|^\alpha}.$$

Alors à partir des estimations précédentes on déduit l'estimation (4.29), pour $c_2 := \max\{2^\alpha, c_6\}$.

■

4.3.2 Estimations locales de régularité

On considère Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ dont le bord contient 0 et $u \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ une solution positive de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad dans \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + u^q = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \backslash \{0\}, \end{cases}$$

où $q > 1$. On rappelle qu'on a montré que $u \in M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$ et $u\lfloor_{\partial\Omega} \in L^q(\partial\Omega)$ (la preuve est similaire à l'étape 1 dans Théorème 3.3.), ce qui implique par la théorie de la régularité du problème de Dirichlet que $u \in W^{\frac{1}{q},q}(\Omega)$. Par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, cela donne $u \in L^{q^*}(\Omega)$ avec $q^* = \frac{N\,q}{N-1}$. On remarque que

$$q^* \geq \frac{N}{N-2} \Longleftrightarrow q \geq \frac{N-1}{N-2}. \tag{4.34}$$

Méthode de Moser

Soit $\xi \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ telle que $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi(x) = 1$ si $dist(x, \partial\Omega) \geq s$, $\xi(x) = 0$ si $dist(x, \partial\Omega) \leq r$ et que $|\nabla \xi| \leq \frac{1}{s-r}$ pour $r < dist(x, \partial\Omega) < s$, où $dist$ désigne la distance de x au bord.

Si $\alpha > 0$, utilisons $\xi^2\, u^\alpha$ comme fonction test,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla(\xi^2\, u^\alpha)\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \xi^2\, u^\alpha\, dS = 0.$$

Comme,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u.\nabla(\xi^2\, u^\alpha)\, dx &= 2\int_\Omega \xi\, u^\alpha\, \nabla u\, \nabla \xi\, dx \,+\, \alpha \int_\Omega u^{\alpha-1} \xi^2\, |\nabla u|^2\, dx, \\
&= \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \int_\Omega \xi^2\, |\nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\, dx \,+\, 2\int_\Omega \xi\, u^{\frac{\alpha+1}{2}}\, (u^{\frac{\alpha-1}{2}}\, \nabla u)\, \nabla \xi\, dx, \\
&= \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \int_\Omega \xi^2\, |\nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\, dx \,+\, \frac{4}{\alpha+1} \int_\Omega \xi\, u^{\frac{\alpha+1}{2}}\, \nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}\, \nabla \xi\, dx, \\
&\geq \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \int_\Omega |\nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\, \xi^2\, dx \\
&- \frac{4}{\alpha+1} \left(\int_\Omega |\nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\, \xi^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u^{\alpha+1} |\nabla \xi|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

On pose,

$$\begin{aligned}
X &= \left(\int_\Omega |\nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\, \xi^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\
Y &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, \xi^2\, u^\alpha\, dS = \int_{\partial\Omega} \xi^2\, u^{\alpha+q}\, dS, \\
A &= \left(\int_\Omega u^{\alpha+1}\, |\nabla \xi|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En réécrivant l'inégalité (4.35) en utilisant ces notations, on a

$$4\alpha X^2 - 4(\alpha+1)AX + (\alpha+1)^2 Y \leq 0. \qquad (4.36)$$

On considère ce dernier polynôme par rapport à X, on conclut qu'il a des racines réelles, donc son discriminant est positive, ce qui entraîne que,

$$\alpha Y \leq A^2 \iff \int_{\partial\Omega} \xi^2\, u^{\alpha+q}\, dS \leq \frac{1}{\alpha} \int_\Omega u^{\alpha+1}\, |\nabla \xi|^2\, dx. \qquad (4.37)$$

On a

$$\xi \nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}} = \nabla(\xi\, u^{\frac{\alpha+1}{2}}) - u^{\frac{\alpha+1}{2}}\, \nabla \xi.$$

Ce qui entraîne,

$$\xi u^{\frac{\alpha+1}{2}}\, \nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}.\nabla \xi = u^{\frac{\alpha+1}{2}}\, \nabla(\xi\, u^{\frac{\alpha+1}{2}})\,.\nabla \xi - u^{\alpha+1} |\nabla \xi|^2.$$

Utilisons ces deux identités et par l'application de l'inégalité de Young, on obtient

$$\left|\xi\, \nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}\right|^2 \geq \frac{1}{2} \left|\nabla(\xi\, u^{\frac{\alpha+1}{2}})\right|^2 - u^{\alpha+1} |\nabla \xi|^2. \qquad (4.38)$$

Par application de l'inégalité de Young à l'inégalité (4.36),

$$\begin{aligned}
&4\alpha \int_\Omega \xi^2 |\nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\, dx - 2(\alpha+1)\epsilon \int_\Omega u^{\alpha+1} |\nabla \xi|^2\, dx - 2(\alpha+1)\frac{1}{\epsilon} \int_\Omega |\nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2\, \xi^2\, dx \\
&+ (\alpha+1)^2 \int_{\partial\Omega} \xi^2\, u^{\alpha+q}\, dS \,\leq 0.
\end{aligned}$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
&(4\alpha - 2(\alpha+1)\frac{1}{\epsilon}) \int_\Omega |\nabla u^{\frac{\alpha+1}{2}}|^2 \, \xi^2 \, dx - 2(\alpha+1)\epsilon \int_\Omega u^{\alpha+1} |\nabla \xi|^2 \, dx \\
&+ (\alpha+1)^2 \int_{\partial\Omega} \xi^2 \, u^{\alpha+q} \, dS \leq 0,
\end{aligned}
$$

il s'ensuit,

$$
\begin{aligned}
&(2\alpha - (\alpha+1)\frac{1}{\epsilon}) \int_\Omega |\nabla(\xi u^{\frac{\alpha+1}{2}})|^2 + (\alpha+1)^2 \int_{\partial\Omega} \xi^2 \, u^{\alpha+q} \, dS \\
&\qquad \leq \left(4\alpha - 2(\alpha+1)\frac{1}{\epsilon} + 2(\alpha+1)\,\epsilon\right) \int_\Omega u^{\alpha+1} |\nabla\xi|^2 \, dx.
\end{aligned}
$$

On prend $\epsilon = \dfrac{\alpha+1}{\alpha}$, et on obtient,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2} \int_\Omega |\nabla(\xi \, u^{\frac{\alpha+1}{2}})|^2 + \int_{\partial\Omega} \xi^2 \, u^{\alpha+q} \, dS \\
&\qquad \leq \frac{4}{\alpha} \int_\Omega u^{\alpha+1} \, |\nabla\xi|^2 \, dx. \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

Si nous supposons $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, alors il existe $c_{\alpha_0} > 0$ tel que

$$
\|\xi \, u^{\frac{\alpha+1}{2}}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \alpha \int_{\partial\Omega} \xi^2 \, u^{\alpha+q} \, dS \leq c_{\alpha_0} \int_\Omega u^{\alpha+1} |\nabla\xi|^2 \, dx.
$$

Supposons $N > 2$ et soit $\theta = \frac{N}{N-2}$. Par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

$$
\|u\|^{\alpha+1}_{L^{\theta(\alpha+1)}(B_s^c \cap \Omega)} + \alpha \int_{B_s^c \cap \partial\Omega} u^{\alpha+q} \, dS \leq \frac{c_{\alpha_0} c_N}{(s-r)^2} \|u\|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(B_r^c \cap \Omega)}. \qquad (4.40)
$$

Fixons $a > 0$ et définissons les suites

$$
\begin{aligned}
p_n &= \theta \, p_{n-1} && \text{avec } p_0 = \alpha_0 + 1, \\
r_n &= a(2 - 2^{-n+1}) && \text{donc } r_0 = a, \\
s_n &= a(2 - 2^{-n}) && \text{d'où } s_\infty = 2a.
\end{aligned}
$$

En faisant itérer l'inégalité (4.40), on obtient,

$$
\|u\|^{p_n}_{L^{p_{n+1}}(B^c_{s_n} \cap \Omega)} + (p_n - 1) \int_{B^c_{s_n} \cap \partial\Omega} u^{p_n+q-1} \, dS \leq \frac{4^n c_N c_{\alpha_0}}{a^2} \|u\|^{p_n}_{L^{p_n}(B^c_{r_n} \cap \Omega)}. \qquad (4.41)
$$

Ce qui permet d'avoir la récurrence,

$$
\|u\|_{L^{p_{n+1}}(B^c_{s_n} \cap \Omega)} \leq 4^{\frac{n}{p_n}} \left(\frac{c_N \, c_{\alpha_0}}{a^2}\right)^{\frac{1}{p_n}} \|u\|_{L^{p_n}(B^c_{r_n} \cap \Omega)}. \qquad (4.42)
$$

En itérant on obtient,

$$
\|u\|_{L^{p_{n+1}}(B^c_{s_n} \cap \Omega)} \leq 4^{\sum_{k=0}^n \frac{k}{p_k}} \left(\frac{c_N \, c_{\alpha_0}}{a^2}\right)^{\sum_{k=0}^n \frac{1}{p_k}} \|u\|_{L^{p_0}(B^c_{r_0} \cap \Omega)}. \qquad (4.43)
$$

Puisque $p_k = \theta^k \, (\alpha_0 + 1)$ l'inégalité précédente s'explicite et donne,

$$
\|u\|_{L^\infty(B^c_{2a} \cap \Omega)} \leq 4^{\frac{N(N-2)}{4(\alpha_0+1)}} \left(\frac{c_N \, c_{\alpha_0}}{a^2}\right)^{\frac{N}{2(\alpha_0+1)}} \|u\|_{L^{\alpha_0+1}(B^c_{r_0} \cap \Omega)}.
$$

Donc,

$$\|u\|_{L^\infty(B^c_{2a}\cap\Omega)} \leq \frac{C}{a^{\frac{N}{\alpha_0+1}}} \|u\|_{L^{\alpha_0+1}(B^c_a\cap\Omega)}. \tag{4.44}$$

Si nous prenons $0 < \alpha_0 < \frac{2}{N-2}$, alors $\alpha_0 + 1 < \frac{N}{N-2}$, d'où

$$\|u\|_{L^{\alpha_0+1}(\Omega)} \leq c\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)} \leq c^{'} \|u\lfloor_{\partial\Omega}\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}.$$

Rappelons le fait que u est une fonction harmonique positive alors sa trace $u\lfloor_{\partial\Omega}$ est une mesure de Radon positive. On en déduit alors qu'il existe $C^{'} > 0$ tel que

$$\|u\|_{L^\infty(B^c_r\cap\Omega)} \leq \frac{C'}{r^{\frac{N}{\alpha_0+1}}} \|u\lfloor_{\partial\Omega}\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)} \quad \forall r > 0. \tag{4.45}$$

Notons aussi qu'on a toujours $u\lfloor_{\partial\Omega}\in L^q(\partial\Omega)$, donc $u \in W^{\frac{1}{q},q}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega)$, avec $q^* = \frac{Nq}{N-1}$. En outre, puisque

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} \leq c\Big(\|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)} + \|u\|_{M^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)}\Big) \leq \|u\lfloor_{\partial\Omega}\|_{\mathcal{M}},$$

et,

$$\|u\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W^{\frac{1}{q},q}(\Omega)} \leq c\|u\lfloor_{\partial\Omega}\|_{L^q(\partial\Omega)},$$

on déduit qu'on a

$$\|u\|_{L^{q^*}(\Omega)} \leq c\,\|u\lfloor_{\partial\Omega}\|_{\mathcal{M}}. \tag{4.46}$$

En prenant $\alpha_0 + 1 = \frac{qN}{N-1}$ on conclut finalement

$$\|u\|_{L^\infty(B^c_r\cap\Omega)} \leq \frac{C'}{r^{\frac{N-1}{q}}} \|u\lfloor_{\partial\Omega}\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)} \quad \forall r > 0. \tag{4.47}$$

Remarquons le fait que $\frac{N-1}{q} < \frac{1}{q-1}$ pour tout q tel que $1 < q < \frac{N-1}{N-2}$, donc pour $r < 1$, cette dernière inégalité entraîne

$$\|u\|_{L^\infty(B^c_r\cap\Omega)} \leq C_1\, r^{-\frac{1}{q-1}}, \tag{4.48}$$

où C_1 est une constante qui dépend de Ω et $\|u\lfloor_{\partial\Omega}\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}$.

Remarque 4.2. *Par continuité de la fonction u jusqu'au bord dans $B^c_r\cap\Omega$, on conclut qu'on a l'estimation a-priori suivante*

$$0 \lneqq u(x) \leq C_1\,|\,x\,|^{-\frac{1}{q-1}} \quad \forall x \in \overline{\Omega}\setminus\{0\}, \tag{4.49}$$

où $C_1 > 0$ dépend de Ω et $\|u\lfloor_{\partial\Omega}\|_{\mathcal{M}(\partial\Omega)}$.

Il est intéressant de noter que la dépendance de la constante C_1 à $\|u\lfloor_{\partial\Omega}\|_{\mathcal{M}}$ n'influencera pas la classification de singularités de l'équation (4.1) notamment dans le contexte du Théorème 4.10 qu'on verra prochainement. Puisque, dans cette classification, ce qui est vraiment utile est l'estimation de l'ordre de "singularité" de u au voisinage de 0, qui est exprimé par le terme $r^{-1/(p-1)}$. Par contre, l'inconvénient est que cette dépendance, limite certains constructions, notamment ça limite notre construction d'une solution à singularité forte mentionné dans la partie b) du Remarque 4.6, cela vient du fait, que dans une telle situation on perdra la borne uniforme de la suite croissante $\{u_k\}_k$ (définie dans Remarque 4.6, partie b)).

On pense qu'une amélioration de l'estimation (4.49) est possible, et qu'on pourra avoir une estimation universelle pour toute les solutions (une estimation de type Keller-Osserman), au sens que, si u est une solution quelconque de (4.1), alors on a l'estimation

$$|u(x)| \leq C\,|\,x\,|^{-\frac{1}{q-1}} \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{4.50}$$

où C est une constante qui dépend uniquement de l'ouvert Ω.

4.3.3 Estimations sur les dérivées de la solution

Théorème 4.4. *Soient Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ dont le bord contient 0 et $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ une solution de*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g(u) \quad sur \quad \partial\Omega\backslash\{0\}, \end{cases} \tag{4.51}$$

où g est une fonction de classe $C^{1,\delta}$. On suppose que u vérifie

$$|u(x)| \leq a(|x|), \tag{4.52}$$

où $a : (0,\infty) \to (0,\infty)$ est une fonction continue décroissante tel que $\lim\limits_{r\to 0} a(r) = \infty$.

Alors, en notant $H_u = D^2 u$, le hessien de u, on a

$$|H_u(x)| \leq c\, a(\frac{|x|}{2}). \tag{4.53}$$

Remarque 4.3. *:*

(1) *La conclusion du théorème précédent reste vraie, si l'équation considérée dans Ω est $-\Delta u = 0$.*

(2) *Si $a(r) = |r|^{-\frac{1}{p-1}}$, alors ce théorème permet de conclure le résultat du Lemme 4.1.*

On rappelle le résultat suivant de Quittner et Reichel ([32], Théorème 6).

Théorème 4.5. *Soient $p \in [1,\infty]$, $f \in L^p(\partial\Omega)$ et $v \in L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ une solution de*

$$\begin{cases} -\Delta v + v = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = f \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.54}$$

Si $q \in [p,\infty]$, alors on a

- *(a) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{N-1}$, alors $v \in L^q(\partial\Omega)$.*
- *(b) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{N}{(N-1)q} < \dfrac{1}{N-1}$, alors $v \in L^q(\Omega)$.*
- *(c) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{N}{(N-1)q} < 0$ alors $v \in W^{1,q}(\Omega)$.*

En outre, dans tous les cas précédents il existe une constante $C_{p,q,N} > 0$ telle que

$$\|v\|_X \leq C_{p,q,N} \|f\|_{L^p(\partial\Omega)}, \tag{4.55}$$

où X est $L^q(\partial\Omega), L^q(\Omega)$ ou $W^{1,q}(\Omega)$ selon le cas.

On en déduit les estimations de plus grande régularité.

Théorème 4.6. *Soient $p \in [1,\infty]$, $f \in W^{1,p}(\partial\Omega)$ et $u \in L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ une fonction vérifiant (4.54). Si $q \in [p,\infty]$ tel que $\frac{1}{p} - \frac{N}{(N-1)q} < 0$ alors $u \in W^{2,q}(\Omega)$. En outre*

$$\|u\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{W^{1,p}(\partial\Omega)}. \tag{4.56}$$

Preuve : Pour simplifier on suppose que $\Omega = B$ la boule unité de $\mathbb{R}^N$. On écrit alors l'équation en coordonnées radiales $(r,\sigma) \in \mathbb{R}_+ \times S^{N-1}$

$$\begin{cases} -u_{rr} - \dfrac{N-1}{r}\,u_r - \dfrac{1}{r^2}\Delta' u + u = 0 \quad dans \quad (0,1) \times S^{N-1} \\ \qquad\qquad u_r(1,.) = f(.) \quad sur \quad S^{N-1}, \end{cases} \tag{4.57}$$

où Δ' désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^{N-1}. Soit A une matrice antisymétrique, et soient $X_t = e^{tA}$ le groupe d'isométrie de S^{N-1} associé à A et D_A la dérivation de Lie correspondante, c'est à dire

$$D_A w(\sigma) = \frac{d}{dt} w(X_t\sigma)\lfloor_{t=0}. \tag{4.58}$$

Comme D_A commute avec Δ', la fonction $w = D_A u$ vérifie

$$\begin{cases} -w_{rr} - \dfrac{N-1}{r} w_r - \dfrac{1}{r^2}\Delta' w + w = 0 \quad dans \quad (0,1) \times S^{N-1} \\ \qquad\qquad w_r(1,.) = D_A f(.) \quad sur \quad S^{N-1}. \end{cases} \tag{4.59}$$

On en déduit que $D_A u$ vérifie

$$\|D_A u\|_{W^{1,q}(B)} \leq C\,\|f\|_{W^{1,p}(\partial B)}. \tag{4.60}$$

Donc,

$$\int_0^1 \int_{S^{N-1}} (|\nabla' u|^q \,+\, |\nabla' u_r|^q \,+\, r^{-q}\,|H_u|^q)\, r^{N-1}\, dS\, dr \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\partial B)}.$$

La notation H_u dans cette formule désigne la matrice hessienne par rapport à la variable σ i.e. la hessienne de la fonction $\sigma \mapsto u(r,\sigma)$. Cette estimation combinée avec

$$\int_0^1 \int_{S^{N-1}} (|u|^q \,+\, |u_r|^q \,+\, r^{-q}\,|\nabla' u|^q)\, r^{N-1}\, dS\, dr \leq C\|f\|_{L^p(\partial B)},$$

permet de conclure,

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 \int_{S^{N-1}} (|u|^q + |u_r|^q + r^{-q}(|\nabla' u|^q + |\nabla' u_r|^q) + r^{-2q}|H_u|^q)\, r^{N-1}\, dSdr \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\partial B)}.$$

À partir de l'équation de u en coordonnées sphériques, une estimation similaire est obtenue pour u_{rr}, ce qui entraîne

$$\|u\|_{W^{2,q}(B\setminus B_{\frac{1}{3}})} \leq C\,\|f\|_{W^{1,p}(\partial B)}. \tag{4.61}$$

Et, à partir de la harmonicité de u on a

$$\sup\left\{|D^2u(x) : |x| \leq \frac{1}{3}|\right\} \leq C \int_{|x|=\frac{1}{2}} |u|(x)\, dx \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\partial B)}.$$

Finalement, l'estimation (4.56) d'en découle.

□

Une itération de ce procédé est possible, cela est annoncée par le théorème suivant.

Théorème 4.7. *Soient $p \in [1,\infty]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in W^{k,p}(\partial\Omega)$ et soit $u \in L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ une fonction vérifiant (4.54). Si $q \in [p,\infty]$ tel que $\frac{1}{p} - \frac{N}{(N-1)q} < 0$ alors $u \in W^{k+1,q}(\Omega)$. En outre*

$$\|u\|_{W^{k+1,q}(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{W^{k,p}(\partial\Omega)}. \tag{4.62}$$

Rappelons que dans la méthode d'interpolation réelle on a, (en reprenant les notations de Lions-Peetre)

$$[W^{1+k,q}(\Omega), W^{k,q}(\Omega)]_{s,q} = W^{k+s,q}(\Omega). \tag{4.63}$$

Le théorème d'interpolation de Lions-Peetre affirme que si L est un opérateur linéaire dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, continue de $W^{k,p}(\Omega)$ à $W^{l,q}(\Omega)$ et de $W^{k+1,p}(\Omega)$ à $W^{l+1,q}(\Omega)$, alors il est continue de $[W^{1+k,p}(\Omega), W^{k,p}(\Omega)]_{s,p} := W^{k+s,p}(\Omega)$ à $[W^{1+l,q}(\Omega), W^{l,q}(\Omega)]_{s,q} := W^{l+s,q}(\Omega)$. il s'ensuit de ce théorème,

Théorème 4.8. *Soit $f \in W^{k+s,p}(\Omega)$ pour un $p \in [1,\infty]$, un $s \in (0,1)$ et un $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $u \in L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ une fonction vérifiant (4.54). Si $q \in [p,\infty]$ tel que $\frac{1}{p} - \frac{N}{(N-1)q} < 0$ alors $u \in W^{k+1+s,q}(\Omega)$. En outre*

$$\|u\|_{W^{k+1+s,q}(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{W^{k+s,p}(\partial\Omega)}. \tag{4.64}$$

On applique cette estimation au problème

$$\begin{cases} -\Delta u \, + \, u = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial n} \; = \, g(u) \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.65}$$

où g est de classe $C^{1,\delta}$ tel que $g(0) = 0$, on déduit le théorème suivant,

Théorème 4.9. *Si u est une solution bornée de (4.65), alors $u \in W^{2+\delta,q}(\Omega)$ pour tout $q < \infty$. En outre*

$$\|u\|_{W^{2+\delta,q}(\Omega)} \leq C \, \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}. \tag{4.66}$$

Preuve :

En utilisant le résultat précédent pour un p suffisamment grand, il s'ensuit que $u \in W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < \frac{Np}{N-1}$. Ainsi $\gamma_0(u) := u\lfloor_{\partial\Omega} \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$ et donc $g(u) \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$ avec

$$\|g(u)\|_{W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Donc,

$$\|u\|_{W^{2-\frac{1}{q},q}(\Omega)} \leq C_3 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

En utilisant à nouveau le théorème de trace, $\gamma_0(u) \in W^{2-\frac{2}{q},q}(\partial\Omega)$. Si on prend $q > \frac{2}{1-\delta}$ on obtient $g(u) \in W^{1+\delta,q}(\partial\Omega)$, ce qui entraîne (4.66).

□

Preuve du Théorème 4.4.

On rappelle que l'opérateur $\mathbb{L} := -\Delta + I$ avec condition au bord de type Neumann est un isomorphisme de $W^{2,p}(\Omega)$ sur $L^p(\Omega)$. Donc c'est aussi un isomorphisme de $L^p(\Omega)$ sur $W^{-2,p}(\Omega)$. Par la suite c'est aussi un isomorphisme entre les classes d'interpolations associées.

En outre, si $\phi \in L^p(\partial(\Omega \cap B_R^c))$, alors la solution $\omega := \mathbb{P}^{-\Delta+I}[\phi]$ de

$$\begin{cases} -\Delta\omega + \omega = 0 \ \ dans \ \ \Omega \cap B_R^c \\ \qquad\quad \omega = \phi \ \ dans \ \ \partial(\Omega \cap B_R^c), \end{cases} \tag{4.67}$$

appartient à $W^{\frac{1}{p},p}(\Omega \cap B_R^c)$, avec estimation continue , et donc $\nabla\omega \in W^{\frac{1}{p}-1,p}(\Omega \cap B_R^c)$.

On pose $D = \max\{|x| : x \in \Omega\}$. Alors $\Omega = \bigcup_{0<R<D} (\Omega \setminus \overline{B}_R)$. On fixe R et soit $\xi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq \xi_R \leq 1$, $\xi_R \equiv 1$ dans B_{2R}^c, $\xi_R \equiv 0$ dans B_R. Soit $v_R = \xi_R\, u$, alors

$$\begin{cases} -\Delta v_R + v_R = -u\,\Delta\xi_R - 2\nabla u.\nabla\xi_R \ \ dans \ \ \Omega \cap B_R^c, \\ \qquad \dfrac{\partial v_R}{\partial n} = \xi_R\, g(u) + u\dfrac{\partial \xi_R}{\partial n} \ \ dans \ \ \partial(\Omega \cap B_R^c). \end{cases} \tag{4.68}$$

On peut écrire $v_R = v_R^\dagger + \tilde{v}_R$ où

$$\begin{cases} -\Delta v_R^\dagger + v_R^\dagger = -u\,\Delta\xi_R - 2\nabla u.\nabla\xi_R \ \ dans \ \ \Omega \cap B_R^c, \\ \qquad \dfrac{\partial v_R^\dagger}{\partial n} = 0 \ \ dans \ \ \partial(\Omega \cap B_R^c), \end{cases} \tag{4.69}$$

et,

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{v}_R + \tilde{v}_R = 0 \ \ dans \ \ \Omega \cap B_R^c, \\ \qquad \dfrac{\partial \tilde{v}_R}{\partial n} = \xi_R\, g(u) + u\dfrac{\partial \xi_R}{\partial n} \ \ dans \ \ \partial(\Omega \cap B_R^c). \end{cases} \tag{4.70}$$

La fonction u est $\mathbb{L}$-harmonique dans $\Omega \cap B_R^c$, donc régulière et

$$\|u\|_{W^{\frac{1}{p},p}(\Omega\cap B_R^c)} \leq ca(R) \Rightarrow \|\nabla u\|_{W^{\frac{1}{p}-1,p}(\Omega\cap B_R^c)} \leq ca(R), \tag{4.71}$$

avec p arbitrairement grand mais fini. Ainsi $v_R^\dagger \in W^{\frac{1}{p}+1,p}(\Omega)$. Maintenant $\tilde{v}_R$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ par le Théorème 4.5, ceci implique que $v_R \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$\|v_R\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq ca(R) \Rightarrow \|u\|_{W^{1,p}(\Omega\cap B_{2R}^c)} \leq ca(R). \tag{4.72}$$

Ensuite, nous remplaçons R par $R_1 > 2R$, et définissons conformément $v_{R_1} = \xi_{R_1} u = v_{R_1}^\dagger + \tilde{v}_{R_1}$ où $v_{R_1}^\dagger$ et $\tilde{v}_{R_1}$ vérifient les mêmes équations précédentes avec R remplacé par R_1. Maintenant,

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega\cap B_{R_1}^c)} \leq c\, a(R_1). \tag{4.73}$$

Cela implique $v_{R_1}^\dagger \in W^{2,p}(\Omega)$ et $\|v_{R_1}^\dagger\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq ca(R_1)$. Quant à l'estimation de $\tilde{v}_{R_1}$, on utilise les théorèmes standards de trace pour avoir,

$$\|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial(\Omega\cap B_{R_1}^c))} \leq ca(R_1). \tag{4.74}$$

Et donc,

$$\|\xi_{R_1} g(u) + u\frac{\partial \xi_{R_1}}{\partial n}\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial(\Omega\cap B_{R_1}^c))} \leq ca(R_1). \tag{4.75}$$

En utilisant le Théorème 4.8, on déduit,

$$\|\tilde{v}_{R_1}\|_{W^{2-\frac{1}{p},p}(\Omega)} \leq ca(R_1) \Longrightarrow \|u\|_{W^{2-\frac{1}{p},p}(\Omega\cap B_{2R_1}^c)} \leq ca(R_1).$$

À l'étape suivante $R_2 > 2R_1$, on devrait obtenir une estimation de u dans $W^{3-\frac{2}{p},p}(\Omega \cap B^c_{2R_2})$, mais il y a une limitation due à la régularité de g. On obtient enfin,

$$\|u\|_{W^{2+\delta,p}(\Omega\cap B^c_{2R_2})} \leq ca(R_2). \tag{4.76}$$

Notons que cela implique

$$\|u\|_{C^{2,s}(\Omega\cap B^c_{2R_2})} \leq ca(R_2), \tag{4.77}$$

pour tout $s < \delta$. Ce qui achève la preuve.

4.4 Classification de singularités

4.4.1 Singularités fortes

Nous allons maintenant classifier les singularités de l'équation (4.1) en adaptant à notre problème la méthode et les notations utilisées par Gmira et Véron [25].

Soit $u \in C^2(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$ une solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + |u|^{p-1}\, u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\backslash\{0\}, \end{cases} \tag{4.78}$$

où Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$, ν désigne la normale extérieure et le point 0 appartient au $\partial\Omega$.

On note $x = (x^{'}, x_n) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ les coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^N$. Sans perte de généralité on suppose que l'hyperplan tangent de $\partial\Omega$ au point 0 est $\{x \in \mathbb{R}^N : x_n = 0\}$ et que le vecteur normale extérieur du domaine dans ce point est $-e_N$. On représente $\partial\Omega$ au voisinage de 0 comme étant le graphe d'une fonction ϕ de classe C^2 définie sur $\mathbb{R}^{N-1} \cap B_R$ et que $\phi(0) = 0$, $\nabla\phi(0) = 0$, et

$$\partial\Omega \cap B_R = \{x = (x^{'}, x_N) : x^{'} \in \mathbb{R}^{N-1} \cap B_R, x_n = \phi(x^{'})\}.$$

Si ν désigne le vecteur normale extérieur sur $\partial\Omega$ placé en un point $x = (x^{'}, x_n) \in \partial\Omega \cap B_R$, alors

$$\nu(x) = \Big(\frac{\nabla\phi}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}}\Big). \tag{4.79}$$

Lemme 4.1. *Supposons que Ω est un domaine borné et que $u \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ est une solution de (4.78) qui vérifie*

$$|u(x)| \leq C|x|^{-\frac{1}{p-1}} \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}, \tag{4.80}$$

où C est une constante qui dépend du domaine Ω. Alors

$$|\nabla u(x)| \leq C|x|^{-\frac{p}{p-1}} \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}, \tag{4.81}$$

et

$$|D^2u(x)| \leq C|x|^{-\frac{2p-1}{p-1}} \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}. \tag{4.82}$$

En plus, il existe $\gamma \in (0,1)$,

$$|D^2u(x) - D^2u(y)| \leq C|x|^{-\frac{2p-1}{p-1}-\gamma}\, |x-y|^{\gamma} \quad \forall x, y \in \overline{\Omega} \setminus \{0\} \ tel\ que\ |x| \leq |y|. \tag{4.83}$$

Remarque 4.4. *Le lemme 4.1 est un cas particulier du Théorème 4.4, l'estimation (4.80) est valide si la solution u est positive (voir Remarque 4.2).*

Le théorème principale qui permet de décrire le comportement de la fonction u au voisinage de 0 est le suivant.

Théorème 4.10. *Supposons que $1 < p < (N-1)/(N-2)$ et que le domaine Ω est borné de classe C^2. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ une solution de (4.78) qui vérifie (4.80). Alors il existe une composante connexe et compacte $\mathcal{F}$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ de solutions de (4.5) tel que :*

$$\lim_{r \to 0} dist_{C^2(S_+^{N-1})}\left(|x|^{\frac{1}{p-1}} u(x), \mathcal{F}\right) = 0. \tag{4.84}$$

On introduit le changement de variables suivant $y = \Phi(x)$,

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ y_n = x_n - \phi(x_1, \cdots, x_{n-1}). \end{cases} \tag{4.85}$$

Soit $R' < R$ tel que $\phi(B_{R'}) \subset\subset \partial\Omega \cap B_R$, si $x = (x', x_n)$ est un point de Ω tel que $x' \in B_{R'}$ et $x_n \in (0, R)$ alors $y \in B_{R'} \times (0, R)$.

On définit $\tilde{u}(y) = u(x)$ avec $y = \Phi(x)$.

On a donc

$$\begin{cases} u_{x_i} = \tilde{u}_{y_i} - \phi_{x_i} \tilde{u}_{y_n} \\ u_{x_n} = \tilde{u}_{y_n}. \end{cases} \tag{4.86}$$

C'est à dire

$$\nabla u = \nabla \tilde{u} - \tilde{u}_{y_n} \nabla \phi. \tag{4.87}$$

Et que,

$$\begin{cases} u_{x_i x_i} = \tilde{u}_{y_i y_i} - 2\phi_{x_i} \tilde{u}_{y_i y_n} + (\phi_{x_i})^2 \tilde{u}_{y_n y_n} - \phi_{x_i x_i} \tilde{u}_{y_n}, \\ u_{x_n x_n} = \tilde{u}_{y_n y_n}. \end{cases} \tag{4.88}$$

Par conséquent,

$$\Delta u = \Delta \tilde{u} - \tilde{u}_{y_n} \Delta \phi + |\nabla \phi|^2 \tilde{u}_{y_n y_n} - 2 \nabla \phi \nabla \tilde{u}_{y_n}.$$

La fonction $\tilde{u}$ vérifie ,

$$-\Delta \tilde{u} + \tilde{u}_{y_n} \Delta \phi - |\nabla \phi|^2 \tilde{u}_{y_n y_n} + 2 \nabla \phi \nabla \tilde{u}_{y_n} = 0 \quad \text{dans} \quad B_{R'} \times (0, R'), \tag{4.89}$$

en plus l'équation du bord de $\tilde{u}$ est ,

$$\begin{cases} (\nabla \tilde{u}.\nu) - \tilde{u}_{y_n} (\nabla \phi.\nu) \ + \ |\tilde{u}|^{p-1} \tilde{u} = 0 \quad \text{sur} \quad B_{R'} \times \{0\} \setminus \{0\}, \\ \tilde{u} \quad \text{est continue} \quad \text{dans} \quad \partial B_{R'} \times (0, R'). \end{cases} \tag{4.90}$$

Puisque $\nabla \phi(0) = \phi(0) = 0$ et si $y \in B_{R'} \times \{0\}$, alors de (4.79) on a,

$$(\nabla \phi.\nu) = \frac{|\nabla \phi|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \phi|^2}} = \mathcal{O}(r^2) \quad \text{lorsque} \quad r \to 0. \tag{4.91}$$

On considère maintenant les coordonnées sphériques dans les y coordonnées,

$$y = (r, \sigma) \quad \text{où } r = |y| \quad \text{et} \quad \sigma \in S_+^{N-1}.$$

Donc,

$$\begin{cases} \nabla \tilde{u} = \tilde{u}_r \overrightarrow{n} + \dfrac{1}{r} \nabla_s \tilde{u} \\ \Delta \tilde{u} = \tilde{u}_{rr} + \dfrac{(N-1)}{r} \tilde{u}_r + \dfrac{1}{r^2} \Delta_s \tilde{u}, \end{cases} \tag{4.92}$$

où $\overrightarrow{n} = \dfrac{y}{|y|}$.

Par la suite,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{y_n} &= \nabla \tilde{u}\ e_n, \\ &= \tilde{u}_r(\overrightarrow{n}.e_n) + \frac{1}{r}(\nabla_s \tilde{u}.e_n). \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{u}_{y_n} &= \nabla \tilde{u}_r.(\overrightarrow{n}.e_n) + \tilde{u}_r.\nabla(\overrightarrow{n}.e_n) + \nabla\left[\frac{1}{r}(\nabla_s \tilde{u}.e_n)\right], \\ &= \left(\tilde{u}_{rr}\overrightarrow{n} + \frac{1}{r}\nabla_s \tilde{u}_r\right).(\overrightarrow{n}.e_n) + \frac{1}{r}\tilde{u}_r \nabla_s(\overrightarrow{n}.e_n) \\ &\quad + \left[-\frac{1}{r^2}(\nabla_s \tilde{u}.e_n) + \frac{1}{r}(\nabla_s \tilde{u}_r.e_n)\right].\overrightarrow{n} + \frac{1}{r^2}\nabla_s(\nabla_s \tilde{u}.e_n), \\ &= \left[\tilde{u}_{rr}(\overrightarrow{n}.e_n) - \frac{1}{r^2}(\nabla_s \tilde{u}.e_n) + \frac{1}{r}(\nabla_s \tilde{u}_r.e_n)\right]\overrightarrow{n} \\ &\quad + \frac{1}{r}(\overrightarrow{n}.e_n)\nabla_s \tilde{u}_r + \frac{1}{r}\tilde{u}_r \nabla_s(\overrightarrow{n}.e_n) + \frac{1}{r^2}\nabla_s(\nabla_s \tilde{u}.e_n). \end{aligned} \tag{4.93}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{y_n y_n} &= \tilde{u}_{rr}(\overrightarrow{n}.e_n)^2 - \frac{1}{r^2}(\nabla_s \tilde{u}.e_n)(\overrightarrow{n}.e_n) + \frac{2}{r}(\nabla_s \tilde{u}_r.e_n)(\overrightarrow{n}.e_n) \\ &\quad + \frac{1}{r}\tilde{u}_r(\nabla_s(\overrightarrow{n}.e_n).e_n) + \frac{1}{r^2}(\nabla_s(\nabla_s \tilde{u}.e_n).e_n). \end{aligned} \tag{4.94}$$

Remplaçons ces expressions en coordonnées sphériques dans l'équation (4.89) et après une multiplication par $(-r^2)$ on obtient,

$$\begin{aligned} &\left[1 + |\nabla\phi|^2(\overrightarrow{n}.e_n)^2 - 2\phi_r(\overrightarrow{n}.e_n)\right] r^2 \tilde{u}_{rr} + \Delta_s \tilde{u} + \Big[(N-1) - (\overrightarrow{n}.e_n) r\, \Delta\phi \\ &+ |\nabla\phi|^2(\nabla_s(\overrightarrow{n}.e_n).e_n) - 2(\nabla_s(\overrightarrow{n}.e_n).\nabla\phi)\Big] r\tilde{u}_r + \left[2\phi_r - |\nabla\phi|^2(\overrightarrow{n}.e_n) - r\Delta\phi\right](\nabla_s \tilde{u}.e_n) \\ &+ 2r\left[|\nabla\phi|^2(\overrightarrow{n}.e_n) - \phi_r\right](\nabla_s \tilde{u}_r.e_n) + |\nabla\phi|^2(\nabla_s(\nabla\tilde{u}.e_n).e_n) - 2r(\overrightarrow{n}.e_n)\nabla_s \tilde{u}_r \nabla\phi \\ &- 2\,\nabla_s(\nabla_s \tilde{u}.e_n)\nabla\phi = 0. \end{aligned} \tag{4.95}$$

On définit,

$$\tilde{u}(r, \sigma) = r^{-\frac{1}{p-1}}\, v(t, \sigma), \quad \text{avec} \quad t = \log r. \tag{4.96}$$

Ainsi,

$$\tilde{u}_r = -\frac{1}{p-1} r^{-\frac{1}{p-1}-1} v + r^{-\frac{1}{p-1}-1} v_t, \tag{4.97}$$

$$\tilde{u}_{rr} = \frac{1}{p-1}\Big(\frac{1}{p-1}+1\Big) r^{-\frac{1}{p-1}-2} v - \Big(\frac{2}{p-1}+1\Big) r^{-\frac{1}{p-1}-2} v_t + r^{-\frac{1}{p-1}-2} v_{tt}, \tag{4.98}$$

$$\Delta_s \tilde{u} = r^{-\frac{1}{p-1}} \Delta_s v \quad \text{et} \quad \nabla_s \tilde{u} = r^{-\frac{1}{p-1}} \nabla_s v. \tag{4.99}$$

Par conséquent, v vérifie,

$$\begin{aligned}&(1+\epsilon_1)\, v_{tt} + (N - \frac{2p}{p-1} + \epsilon_2)\, v_t + (l_{p,N} + \epsilon_3)\, v + \Delta_s v + (\nabla_s v . \overrightarrow{\epsilon}_4) + (\nabla_s v_t . \overrightarrow{\epsilon}_5)\\ &+ (\nabla_s(\nabla_s v . e_n) . \overrightarrow{\epsilon}_6) = 0.\end{aligned} \tag{4.100}$$

Pour $(t,\sigma) \in (-\infty, \log R') \times S_+^{N-1}$, où

$$l_{p,N} = \Big(\frac{1}{p-1}\Big)\Big(\frac{1}{p-1} + 2 - N\Big).$$

Et,

$$\epsilon_1 = |\nabla\phi|^2 (\overrightarrow{n}.e_n)^2 - 2\phi_r (\overrightarrow{n}.e_n). \tag{4.101}$$

$$\epsilon_2 = -\Big(\frac{2}{p-1}+1\Big)\,\epsilon_1 - (\overrightarrow{n}.e_n) r\Delta\phi + |\nabla\phi|^2 (\nabla_s(\overrightarrow{n}.e_n).e_n) - 2(\nabla_s(\overrightarrow{n}.e_n).\nabla\phi). \tag{4.102}$$

$$\epsilon_3 = -\frac{1}{p-1}\Big[\epsilon_2 + \frac{1}{p-1}\epsilon_1\Big]. \tag{4.103}$$

$$\overrightarrow{\epsilon}_4 = \frac{2}{p-1}(\overrightarrow{n}.e_n)\,\nabla\phi + \Big[\frac{2p}{p-1}\phi_r - \Big(\frac{p+1}{p-1}\Big)(\overrightarrow{n}.e_n)|\nabla\phi|^2 - r\Delta\phi\Big]\, e_n. \tag{4.104}$$

$$\overrightarrow{\epsilon}_5 = -2(\overrightarrow{n}.e_n)\nabla\phi + 2\Big[|\nabla\phi|^2(\overrightarrow{n}.e_n) - \phi_r\Big]\, e_n. \tag{4.105}$$

$$\overrightarrow{\epsilon}_6 = -2\nabla\phi + |\nabla\phi|^2\, e_n. \tag{4.106}$$

Puisque $\phi(x) = \mathcal{O}(r^2)$ alors,

$$|\epsilon_i| = \mathcal{O}(r) \qquad \forall i = 1, 2, .., 6. \tag{4.107}$$

Sur $(-\infty, \log R'] \times \partial S_+^{N-1}$ la fonction v vérifie l'équation suivante,

$$(v_t - \frac{1}{p-1}v)\epsilon_8 \;-\; \epsilon_7\Big[(v_t - \frac{1}{p-1}v)(\overrightarrow{n}.e_n) + (\nabla_s v.e_n)\Big] \;+\; (\nabla_s v.\nu) + |v|^{p-1}v = 0, \tag{4.108}$$

où,

$$\epsilon_7 = (\nabla\phi.\nu) = \mathcal{O}(r^2) \;\; \text{lorsque} \;\; r \to 0, \tag{4.109}$$

$$|\epsilon_8| = |(\overrightarrow{n}.\nu)| \le \frac{|\nabla\phi|}{\sqrt{1+|\nabla\phi|^2}} = \mathcal{O}(r). \tag{4.110}$$

Lorsque le point P varie sur $\partial\Omega$ alors $y_n = 0$ et le vecteur $\overrightarrow{n}(P)$ contient uniquement les $N-1$ premières composantes, et comme conséquence de Cauchy Schwarz sur les $N-1$ composantes on déduit l'estimation précédente sur ϵ_8.

La preuve du Théorème 4.10 est maintenant réduite à l'étude du comportement asymptotique de $v(t,.)$ lorsque $t \to -\infty$.

Lemme 4.2. *Les relations*

$$\int_{-\infty}^{T}\int_{S_+^{N-1}} v_t^2\, d\sigma\, dt < \infty, \tag{4.111}$$

et

$$\int_{-\infty}^{T}\int_{S_+^{N-1}} (v_{tt}^2 + |\nabla_s v_t|^2)\, d\sigma\, dt < \infty, \tag{4.112}$$

sont satisfaites pour $T < \log R^{'}$ *.*

Preuve :

Puisque $\phi(0) = 0$ et $\nabla\phi(0) = 0$ alors à partir d'un développement de Taylor d'ordre deux de la fonction ϕ au voisinage de 0, on déduit les comportements suivants lorsque $r \to 0$,

$$\begin{cases} \phi(x) = \mathcal{O}(r^2) \quad \text{et} \quad |\nabla\phi(x)| = \mathcal{O}(r). \\ \phi_r(x) = \mathcal{O}(r) \quad \text{et} \quad |\Delta\phi(x)| = \mathcal{O}(1). \end{cases} \tag{4.113}$$

À partir de ces comportements on déduit,

$$|\epsilon_j(t,.)| \leq Ce^t \quad \text{pour} \quad j = 1,\ldots,8 \quad \text{en plus} \quad |\epsilon_{jt}(t,.)| + |\nabla_s \epsilon_j| \leq Ce^t \text{ pour } j = 1,5,6,7. \tag{4.114}$$

Le Lemme 4.1 affirme que v ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont bornée dans $C^0(S_+^{N-1})$.

On multiplie l'équation (4.100) par v_t et on intègre par partie sur S_+^{N-1}, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\int_{S_+^{N-1}} (v_t^2 + l_{p,N} v^2 - |\nabla_s v|^2)\, d\sigma - \frac{1}{p+1}\int_{S^{N-2}} |v|^{p+1}\, d\sigma^{'}\Big] + \Big(N - \frac{2p}{p-1}\Big)\int_{S_+^{N-1}} v_t^2\, d\sigma \\ &+ \eta_1(t) + \eta_2(t) = 0, \end{aligned} \tag{4.115}$$

où

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \int_{S_+^{N-1}} \Big[\epsilon_1 v_{tt} + \epsilon_2 v_t + \epsilon_3 v + (\nabla_s v.\overrightarrow{\epsilon}_4) + (\nabla_s v_t.\overrightarrow{\epsilon}_5) + (\nabla_s(\nabla_s v.e_n).\overrightarrow{\epsilon}_6)\Big] v_t\, d\sigma, \\ \eta_2(t) &= \int_{S^{N-2}} \Big[-(v_t - \frac{1}{p-1}v)\epsilon_8 + \Big((v_t - \frac{1}{p-1}v)(\overrightarrow{n}.e_n) + (\nabla_s v.e_n)\Big)\epsilon_7\Big] v_t\, d\sigma^{'}. \end{aligned}$$

Les estimations dans (4.114) impliquent,

$$|\eta_i(t)| \leq ce^t, \quad \text{pour} \quad i = 1,2. \tag{4.116}$$

Puisque $N \neq (2p)/(p-1)$, en intégrant la formule (4.115) entre $-\infty$ et $\log R^{'}$ et en prenant en compte les estimations sur les η_i et la bornitude de v ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre deux on conclut,

$$\int_{-\infty}^{\log R^{'}}\int_{S_+^{N-1}} v_t^2\, d\sigma\, dt < \infty. \tag{4.117}$$

La preuve de la première estimation vient d'être établie.

On remarque qu'on a

$$vv_{tt} = (vv_t)_t - v_t^2 \quad \text{et} \quad \nabla_s v \nabla_s v_{tt} = (\nabla_s v \nabla_s v_t)_t - |\nabla_s v_t|^2. \tag{4.118}$$

Multiplions cette fois l'équation (4.100) par v_{tt} et effectuons une intégration par partie sur S_+^{N-1} et en utilisant (4.118), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{S_+^{N-1}} (v_{tt}^2 - l_{p,N} v_t^2 + |\nabla_s v_t|^2)\, d\sigma + \int_{S^{N-2}} p|v|^{p-1} v_t^2 \, d\sigma' \; + \; \gamma_1(t) \; + \; \gamma_2(t) \\ &+ \frac{d}{dt}\Big[\int_{S_+^{N-1}} (\frac{N}{2} - \frac{p}{p-1})\, v_t^2 + l_{p,N} v v_t - (\nabla_s v.\nabla_s v_t)\, d\sigma - \int_{S^{N-2}} |v|^{p-1} v\, v_t \, d\sigma' \Big] = 0, \quad (4.119)\end{aligned}$$

où,

$$\gamma_1(t) = \int_{S_+^{N-1}} \Big[\epsilon_1 v_{tt} + \epsilon_2 v_t + \epsilon_3 v + (\nabla_s v.\overrightarrow{\epsilon}_4) + (\nabla_s v_t.\overrightarrow{\epsilon}_5) + (\nabla_s(\nabla_s v.e_n).\overrightarrow{\epsilon}_6) \Big] v_{tt}\, d\sigma,$$

$$\gamma_2(t) = \int_{S^{N-2}} \Big[\epsilon_7 \Big((v_t - \frac{1}{p-1} v)\, (\overrightarrow{n}.e_n) + (\nabla_s v.e_n) \Big) - \epsilon_8 (v_t - \frac{1}{p-1} v) \Big] v_{tt}\, d\sigma'.$$

On conclut à partir de (4.114) ;

$$|\gamma_i(t)| \leq c e^t, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2. \qquad (4.120)$$

De la bornitude de v, v_t,$\nabla_s v$ et $\nabla_s v_t$ et de (4.117) , (4.120) on déduit lorsqu'on intègre (4.119) entre $-\infty$ et $\log R'$,

$$\int_{-\infty}^{\log R'} \Big[\int_{S_+^{N-1}} (v_{tt}^2 + |\nabla_s v_t|^2)\, d\sigma + \int_{S^{N-2}} p|v|^{p-1} v_t^2 \, d\sigma' \Big] < \infty. \qquad (4.121)$$

Ce qui achève la preuve.

□

Lemme 4.3. *On a*

$$\lim_{t \to -\infty} \Big(\|v_t(t,.)\|_{L^2(S_+^{N-1})} + \|v_{tt}(t,.)\|_{L^2(S_+^{N-1})} \Big) = 0. \qquad (4.122)$$

Preuve :

À partir du Lemme 4.1, les fonctions $g_1 : t \mapsto \int_{S^{N-1}} v_t^2(t,.)\, d\sigma$ et $g_2 : t \mapsto \int_{S_+^{N-1}} v_{tt}^2\, d\sigma$ sont équicontinues sur $(-\infty, T)$, et le résultat du Lemme 4.2 assure que ces deux fonctions sont intégrables. Ainsi, si on désigne par g l'une de ces fonctions, alors le problème maintenant est de montrer que : Si g est une fonction équicontinues sur $(-\infty, T)$ et que $g \in L^1(-\infty, T)$, alors $\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) = 0$.

Si on suppose que $\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) > 0$, alors ils existent une suite décroissante $t_n \to -\infty$ et un $\epsilon > 0$ tel que $g(t_n) > \epsilon$. À partir de l'équicontinuité il existe un $\eta > 0$ (uniforme pour tout les t_n) tel que $g(t) > \epsilon/2$ pour tout t tel que $|t - t_n| < \eta$, par conséquent

$$\int_{t_n - \eta}^{t_n + \eta} g(t)\, dt \geq \eta\, \epsilon. \qquad (4.123)$$

Lorsqu'on fait tendre n vers l'infini, le terme $\displaystyle\int_{t_n - \eta}^{t_n + \eta} g(t)\, dt$ ne peut pas tendre vers 0, ce qui contredit le fait que $g \in L^1(-\infty, T)$.

□

Preuve du Théorème 4.10

Si $\mathcal{T}^-(v) := \{v(t,.) : t \leq 0\}$ désigne la trajectoire de $v(t,.)$, alors à partir du Lemme 4.1, $\mathcal{T}^-(v)$ est bornée dans $C^{2,\gamma}(S_+^{N-1})$ et par application du théorème d'Ascoli-Arzela, $\mathcal{T}^-(v)$ est relativement compacte dans $C^2(\overline{S}_+^{N-1})$. On déduit du Lemme 4.3 que v_{tt} et v_t tendent vers 0 lorsque t tend vers $-\infty$. Par conséquent, la limite-α de $\mathcal{T}^-(v)$ qui est définie par

$$A\left[\mathcal{T}^-(v)\right] := \bigcap_{t \leq \log R'} \left(\overline{\bigcup_{\tau \leq t} \{v(\tau,.)\}}^{C^2(S_+^{N-1})} \right),$$

est une partie non vide compacte et connexe de solutions de l'équation (4.5),

$$\mathcal{E}[S_+^{N-1}] := \{\omega \in C^1(\overline{S}_+^{N-1}) : \Delta' \omega + l_{p,N}\ \omega = 0 \ \text{ dans } \ S_+^{N-1}, (\nabla' \omega.\nu) + |\omega|^{p-1}\omega = 0 \ \text{ sur } \ S^{N-2}\} \tag{4.124}$$

Ce qui achève la preuve.

■

Un cas particulier important du théorème précédent est énoncée par le théorème suivant.

Théorème 4.11. *On considère $N \geq 3$. Avec les mêmes hypothèses que le Théorème 4.10, on suppose en plus que u est positive au voisinage du point 0 et*

$$\frac{N}{N-1} < p < \frac{N-1}{N-2}. \tag{4.125}$$

Alors,

(i) Soit il existe $\alpha \geq 0$ tel que

$$\lim_{x \to 0} |x|^{N-2}\, u(x) = \alpha, \tag{4.126}$$

et par conséquent u se prolonge en 0 vers une solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} + |v|^{p-1}\, v = c_N \alpha \delta_0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.127}$$

avec $c_N = \frac{N\,(N-2)\,\omega_N}{2}$.

(ii) Ou bien

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\frac{1}{p-1}} u(x) = \omega(\sigma), \tag{4.128}$$

uniformément par rapport à σ, où ω est l'unique solution strictement positive de (4.5).

Remarque 4.5. *:*

a) *Dans le cas (i) du théorème précédent on dit que la singularité est faible en 0, et dans le cas (ii) on dit que la singularité est forte en 0.*

b) *Si $\alpha = 0$ dans le cas i), alors à partir de l'équation (4.127) il est claire que $u = 0$.*

c) *Le résultat du Théorème 4.11 est valide si on néglige l'hypothèse "u positive au voisinage de 0". En effet, dans un tel cas le paramètre α dans i) pourra être positive ou bien négative et dans ii) on a la convergence soit vers ω la solution strictement positive du (4.5) ou bien vers $-\omega$.*

Preuve du Théorème 4.11

D'après le résultat du Théorème 4.10, $|x|^{\frac{1}{p-1}}u(x)$ converge lorsque $x \to 0$ vers une partie connexe et compacte de l'ensemble $\mathcal{E}_+$, et puisque l'ensemble $\mathcal{E}_+$ contient que deux éléments lorsque $N/(N-1) < p < p_c$ (Théorème 4.1), on conclut que $|\,x\,|^{\frac{1}{p-1}}\,u\,(\,x\,)$ converge soit vers 0 soit vers ω la solution positive du problème (4.5) .

Cas 1 : Singularité forte :

Si :

$$|\,x\,|^{\frac{1}{p-1}}\,u\,(\,x\,) \longrightarrow \omega(\cdot). \tag{4.129}$$

Dans ce cas on a une singularité forte du problème (4.1). La partie (ii) du Théorème 4.11 vient d'être établie .

Cas 2 : Singularité faible :

On suppose maintenant que :

$$|\,x\,|^{\frac{1}{p-1}}\,u\,(\,x\,) \longrightarrow 0. \tag{4.130}$$

Ce cas est un cas particulier du résultat du Théorème 4.12, dont on démontrera indépendamment dans la suite.

L'hypothèse $N/(N-1) < p < (N-1)/(N-2)$ est équivalente à $N-2 < \dfrac{1}{p-1} < N-1$. En utilisant les notations de la preuve du Théorème 4.12, on note $k_0 = N-2$. À partir du résultat du Propositions 4.4 et 4.5 , il existe une constante $\alpha \geq 0$ tel que :

$$\lim_{r\to 0} r^{N-2}\ \tilde{u}(r,\sigma) = \alpha.$$

Ce qui est la partie (i) .

■

Remarque 4.6. *:*

a) *Il est intéressant de noter que si on utilise l'estimation a-priori (4.49), qu'on a établi en utilisant la méthode de Moser (voir Remarque 4.2), le résultat du Théorème 4.11 reste valide. Ainsi, si on combine le résultat de ce théorème avec le fait que la solution stationnaire ω est bornée, alors on obtient l'estimation a priori universelle*

$$|u(x)| \,\leq\, C\,r^{-\frac{1}{p-1}} \quad (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}), \tag{4.131}$$

où la constante C dépend uniquement de Ω.

b)*Sous les hypothèses du Théorème 4.11, on peut construire une solution à singularité forte de la façon suivante.*

Soit u_k la solution positive de,

$$\begin{cases} -\Delta u_k = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial n} + u_k^p = k\ c_N\,\delta_0 \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.132}$$

où

$$\frac{N}{N-1} < p < \frac{N-1}{N-2}.$$

Selon le Théorème 4.11, on a le comportement suivant des fonctions u_k au voisinage de 0

$$\lim_{r \to 0} |u_k(x)|\, r^{N-2} = k,$$

et, il existe une constante $C > 0$ qui dépend uniquement de Ω, tel qu'on a l'estimation universelle suivante sur toutes les solutions de (4.78),

$$|w(x)| \; \leq C\, r^{-\frac{1}{p-1}} \quad (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}). \tag{4.133}$$

La suite $(u_k)_k$ est strictement croissante (principe de comparaison), et à partir de l'estimation universelle précédente, on conclut que u_k converge ponctuellement presque partout vers une fonction positive u,

$$0 \lneqq u_1 \lneqq \cdots \lneqq u_k \lneqq u_{k+1} \lneqq \cdots \lneqq u.$$

Lorsqu'on fait tendre k vers l'infini, on conclut que u vérifie la même estimation universelle,

$$0 \lneqq u(x) \leq C r^{-\frac{1}{p-1}} \; (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}).$$

Rappelons que l'équation (4.132) est prise au sens très faible suivant,

$$(\forall \xi \in \mathcal{C}_\Omega) \; \int_\Omega u_k(-\Delta \xi) \; + \int_{\partial\Omega} u_k^p\, \xi\, dS \; = \; k\, c_N\, \xi(0). \tag{4.134}$$

La monotonie de u_k et l'estimation universelle, permet d'affirmer la convergence forte de $\{u_k\}$ vers u dans $L^1(\Omega)$. En faisant tendre k vers l'infini, et on fixe ξ tel que $\xi(0) = 0$, on conclut,

$$\int_\Omega u\, (-\Delta \xi)\, dx \; + \int_{\partial\Omega} u^p\, \xi\, dS \; = \; 0.$$

Ce qui implique que u est une solution du problème,

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} \; + \; u^p \; = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \setminus \{0\}, \end{cases} \tag{4.135}$$

qui vérifie

$$\lim_{r \to 0} u(x)\, r^{N-2} \; = +\infty.$$

Selon le Théorème 4.11, par exclusion, le seul comportement possible de la fonction u au voisinage de 0 est,

$$u(x) = r^{-\frac{1}{p-1}} \; \omega\!\left(\frac{x}{|x|}\right) \; + \; o(1),$$

où ω est l'unique solution positive de (4.5).

Il est intéressant de noter que si on ne limite pas le choix de fonctions tests ξ à ceux dont $\xi(0) = 0$, alors en passant à la limite dans (4.134), et au moyen de convergence monotone des intégrales, on conclut que u est solution de l'équation suivante,

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} \; + \; u^p \; = +\infty \cdot \delta_0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.136}$$

La mesure de Dirac à masse infini $(+\infty \cdot \delta_0)$ *est une mesure de Borel non bornée, définie sur un ensemble borélien* A *par,*

$$(+\infty \cdot \delta_0, A) = \begin{cases} 0 & si \;\; 0 \notin A, \\ +\infty & si \;\; 0 \in A. \end{cases}$$

4.4.2 Singularités faibles

Dans cette section, on étudie le comportement précis au voisinage de 0 de solutions u de (4.78) qui vérifie

$$\lim_{r \to 0} r^{\frac{1}{p-1}} \; u(x) = 0. \tag{4.137}$$

On gardera les mêmes notations précédentes, notre résultat principale est le théorème suivant.

Théorème 4.12. *On considère* $N \geq 3$ *et* Ω *un domaine bornée régulier de* $\mathbb{R}^N$*. On suppose que*

$$1 < p < (N-1)/(N-2),$$

et que

$$\frac{1}{p-1} \notin \mathbb{N}.$$

Si $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ *est une solution de (4.78) qui vérifie*

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\frac{1}{p-1}} u(x) = 0. \tag{4.138}$$

Alors,

i) Soit, $u = 0$.

ii) Soit, il existe un entier $k \in [N-2, \dfrac{1}{p-1})$ *et une fonction harmonique sphérique non nulle* ψ *de degré* $k + 2 - N$ *qui vérifie* $\dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0$ *et que*

$$\lim_{r \to 0} r^k \, u(r, .) \; = \; \psi(.), \tag{4.139}$$

dans $C^2(S_+^{N-1})$.

Avant de prouver le Théorème 4.12, on a besoin de propositions suivantes.

Proposition 4.2. *Sous les hypothèses du Théorème 4.12, on a*

$$(\, \exists \, \epsilon \; > \; 0 \,) \qquad | \, \tilde{u} \, (\, x \,)| \;\; r^{\frac{1}{p-1}} \;\; \leq C \; r^{\epsilon}, \tag{4.140}$$

au voisinage de 0 .

Preuve :

On suppose par l'absurde que :

$$(\forall \epsilon > 0) \qquad \limsup_{t \to -\infty} e^{-\epsilon t} \rho(t) = +\infty,$$

où $\rho(t) = \|v(t,.)\|_{C^0(\overline{S_+^{N-1}})}$, $v(t,\sigma) = r^{\frac{1}{p-1}} \tilde{u}(r,\sigma)$ et $t = \log r$.

Soit $\eta \in C^\infty((-\infty, \log R])$ une fonction qui satisfait les hypothèses suivantes :

$$\eta > 0 \qquad \eta' > 0 \qquad \lim_{t \to -\infty} \eta(t) = 0, \tag{4.141}$$

$$0 < \limsup_{t \to -\infty} \rho(t)/\eta(t) < +\infty, \tag{4.142}$$

$$\lim_{t \to -\infty} e^{-\epsilon t} \eta(t) = +\infty \qquad \text{pour tout } \epsilon > 0, \tag{4.143}$$

$$(\eta'/\eta) \text{ et } (\eta'/\eta)' \text{ uniformément bornées et intégrable sur } (-\infty, \log R), \tag{4.144}$$

$$\lim_{t \to -\infty} (\eta'/\eta)(t) = \lim_{t \to -\infty} (\eta'/\eta)'(t) = 0. \tag{4.145}$$

L'existence d'une telle fonction η a été montré dans [19].

Soit $v(t,\sigma) = \eta(t)\, w(t,\sigma)$. La fonction $w(t,\sigma)$ est une solution bornée de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&(1+\epsilon_1)\, w_{tt} + \Big[(N - \frac{2p}{p-1} + \epsilon_2) + 2(1+\epsilon_1)(\frac{\eta_t}{\eta})\Big] w_t + \Big[(l_{p,N} + \epsilon_3) + (1+\epsilon_1)(\frac{\eta_{tt}}{\eta}) \\
&+ (N - \frac{2p}{p-1} + \epsilon_2)(\frac{\eta_t}{\eta})\Big] w + \Delta_S w + < \nabla_S w, \overrightarrow{\epsilon}_4 + (\frac{\eta_t}{\eta}) \overrightarrow{\epsilon}_5 > + < \nabla_S w_t, \overrightarrow{\epsilon}_5 > \\
&+ < \nabla_S < \nabla_S w, e_N >, \overrightarrow{\epsilon}_6 > = 0. \qquad \textit{dans}\, (-\infty, \log R') \times S_+^{N-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big((\frac{\eta_t}{\eta}) - \frac{1}{p-1}\Big) w + w_t\Big] \epsilon_8 + < \nabla_S w, \nu > - \epsilon_7 \Big[\Big(((\frac{\eta_t}{\eta}) - \frac{1}{p-1}) w + w_t\Big) < n, e_N > \\
&+ < \nabla_S w, e_N > \Big] + \eta^{p-1} |w|^{p-1} w = 0. \qquad \textit{sur} (-\infty, \log R) \times S^{N-2}.
\end{aligned}$$

En utilisant les estimations sur les ϵ_j et les hypothèses sur η on obtient (en suivant la même méthode utilisée dans la preuve du *Théorème 4.10*) que la trajectoire du $w(t,.)$ est relativement compact dans $C^2(\overline{S}_+^{N-1})$, donc

$$A\Big[\mathcal{J}^-(w)\Big] = \bigcap_{t \le \log R} \Big(\overline{\bigcup_{\tau \le t} \{w(t,.)\}}^{C^2(S_+^{N-1})} \Big),$$

est un ensemble non vide compact et connexe de :

$$\mathcal{N}\Big[S_+^{N-1}\Big] := \Big\{ z \in C^1(\overline{S}_+^{N-1}) : \Delta_S z + l_{p,N}\, z = 0 \text{ dans } S_+^{N-1} \text{ et } < \nabla_S z, \nu > = 0 \text{ sur } S^{N-2} \Big\},$$

où $l_{p,N} = \Big(\frac{1}{p-1}\Big)\Big(\frac{1}{p-1} + 2 - N\Big)$.

Considérons l'équation générale,

$$\begin{cases} \Delta_S \, \omega \,+\, \lambda \, \omega = 0 \qquad \text{dans} \qquad S_+^{N-1}, \\ \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur} \qquad S^{N-2}. \end{cases} \tag{4.146}$$

(L'étude de cette équation a été effectué dans Appendice 5.4)

La limite alpha de $w\,(\,t\,,\,\sigma)$ est une solution de (4.146) pour $\lambda \,=\, l_{p,N}$. Ce qui entraîne que $\mathcal{N}\left[S_+^{N-1}\right] = \{0\}$, ce qui contredit l'hypothèse (4.142).

□

L'objectif de la prochaine étape est d'affiner l'estimation (4.140) .

On a : $N \,-\, 2 \,<\, \dfrac{1}{p-1}$, on pose : $\beta \,=\, \dfrac{1}{p-1} \,-\, k_0$, où k_0 est le plus grand entier naturel inférieure à $\dfrac{1}{p-1}$.

Proposition 4.3. *Sous les hypothèses du Proposition 4.2, on a :*

$$\|\tilde{u}\,(\,x\,)\|_{H^1(S_+^{N-1})} \leq M\,r^{-\,k_0}. \tag{4.147}$$

Preuve :

On rappelle que les vecteurs propres du problème (4.146) $\{e_k^j \;:\; 1 \,\leq\, j \,\leq\, n_k\}$, forment une base orthonormée de $H^1(S_+^{N-1})$. L'étude menée dans l'Appendice 5.4 nous donne que ses valeurs propres sont les nombres $\lambda_k := k(k+N-2)$, pour $k \in \mathbb{N}$, et que les vecteurs propres e_k associés à λ_k sont certains fonctions harmoniques sphériques de degré k.

Soit $v\,(\,t\,,\sigma\,) \;=\; r^{\frac{1}{p-1}}\,\tilde{u}\,(\,r\,,\,\sigma)$ avec $t \,=\log r$.

$$v\,(\,t\,,.\,) \;= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_k} \; a_k^j\,(\,t\,)\,e_k^j \;\text{ dans }\; S_+^{N-1}. \tag{4.148}$$

L'estimation (4.147) qu'on cherche à démontrer est équivalente à :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\;\sum_{j=1}^{n_k}\;(\,1\,+\,\lambda_k\,)\,(\,a_k^j\,(\,t\,))^2 \;\leq M\,e^{2\,\beta\,t}. \tag{4.149}$$

On projette l'équation vérifiée par $v(t,.)$ sur les espaces propres $\{e_k^j \;:\; 1 \,\leq\, j \,\leq\, n_k\}$, et cela en utilisant e_k^j comme fonction test dans l'équation vérifiée par $v\,(\,t\,,\,\sigma\,)$. Ainsi les $(\,a_k^j\,(\,t\,))$ vérifient :

$$(\,a_k^j\,(\,t\,))''\,+\,(\,N\,-\,\frac{2\,p}{p-1}\,)(\,a_k^j\,(\,t\,))'\,+\,(\,l_{pN}\,-\lambda_k\,)\,(\,a_k^j\,(\,t\,))\,+\,B_k^j\,(\,t\,)\,+\,D_k^j\,(\,t\,) = 0$$
$$\text{sur } (-\infty\,,\log R), \tag{4.150}$$

où :

$$B_k^j = \int_{S_+^{N-1}} e_k^j \left(\epsilon_1 v_{tt} + \epsilon_2 v_t + \epsilon_3 v + (\nabla' v \overrightarrow{\epsilon_4}) + (\nabla' v_t \overrightarrow{\epsilon_5}) + (\nabla' (\nabla' v e_N) \overrightarrow{\epsilon_6}) \right) d\sigma,$$
$$D_k^j = \int_{\partial S_+^{N-1}} e_k^j (\nabla' v \overrightarrow{\nu}) \, d\sigma'.$$

Étape 1 : Résolution de (4.150) : Pour $k \in \mathbb{N}$, les nombres

$$\begin{cases} (i) \qquad r_1 = \dfrac{1}{p-1} + k, \\ \\ (ii) \qquad r_2 = \dfrac{1}{p-1} + 2 - N - k, \end{cases} \tag{4.151}$$

sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$X^2 + \left(N - \frac{2p}{p-1} \right) X + l_{p,N} = \lambda_k.$$

À priori il faut traiter les cas $r_2 \geq 0$ et $r_2 \leq 0$ séparément .

<u>*Cas 1*</u> : $k \in \{0, 1, ...k_0 + 2 - N\}$

Si on note par n_k la multiplicité de la valeur propre λ_k, alors la solution de l'équation différentielle ordinaire (4.150) est,

$$a_k^j(t) = (r_1 - r_2)^{-1} \left([a_k^j]'(0) - r_2 \, a_k^j(0) \right) e^{r_1 t} + (r_2 - r_1)^{-1} ([a_k^j]'(0) - r_1 \, a_0(0)) \, e^{r_2 t}$$
$$- (r_2 - r_1)^{-1} \int_t^0 e^{r_1 (t-s)} (B_k^j + D_k^j)(s) ds - (r_1 - r_2)^{-1} \int_t^0 e^{r_2 (t-s)} (B_k^j + D_k^j)(s) ds. \tag{4.152}$$

<u>*Cas 2*</u> : $k \geq k_0 + 3 - N$

La solution du (4.150) est exprimée par :

$$a_k^j(t) = a_k^j(0) \, e^{r_1 t} + (r_1 - r_2)^{-1} e^{r_1 t} \int_t^0 (e^{-r_1 s} - e^{-r_2 s}) (B_k^j + D_k^j)(s) ds$$
$$- (r_1 - r_2)^{-1} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t}) \int_{-\infty}^t e^{-r_2 s} (B_k^j + D_k^j)(s) ds. \tag{4.153}$$

Étape 2 : Estimations sur B_k^j et D_k^j :

On pose $z(t, \sigma) = e^{-\epsilon t} \, v(t, \sigma)$.

D'après (4.140), la fonction $z(t, \sigma)$ est bornée, et elle vérifie :

$$(1 + \epsilon_1) z_{tt} + \left[(N - \frac{2p}{p-1} + \epsilon_2) + 2(1 + \epsilon_1) \epsilon \right] z_t + \left[(l_{p,N} + \epsilon_3) + (1 + \epsilon_1) \epsilon^2 \right.$$
$$\left. + \, (N - \frac{2p}{p-1} + \epsilon_2) \epsilon \right] z + \Delta_S z + < \nabla_S z , \overrightarrow{\epsilon}_4 + \epsilon \overrightarrow{\epsilon}_5 > + < \nabla_S z_t , \overrightarrow{\epsilon}_5 >$$
$$+ < \nabla_S < \nabla_S z , e_N > , \overrightarrow{\epsilon}_6 > = 0. \qquad dans \, (-\infty, \log R) \times S_+^{N-1},$$

$$\left[(\epsilon - \frac{1}{p-1}) z + z_t \right] \epsilon_8 + < \nabla_S z, \nu > - \epsilon_7 \left[\left((\epsilon - \frac{1}{p-1}) z + z_t \right) < n , e_N > \right.$$
$$\left. + < \nabla_S z, e_N > \right] + e^{\epsilon \, (p-1) t} |z|^{p-1} z = 0. \qquad sur (-\infty, \log R) \times S^{N-2}.$$

Par la même méthode d'énergie appliqué au Théorème 4.10, la trajectoire de $z\,(\,t,.\,)$ est relativement compacte dans $C^2(\overline{S}_+^{N-1})$, plus précisément, on a :

$$\|z\|_{C^{2,\delta}(-\infty,\log R)\times\overline{S}_+^{N-1}} < \infty \qquad (\forall\,\delta > 0). \tag{4.154}$$

Ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\|\epsilon_1\, v_{tt}\|^2_{H^1(S_+^{N-1})} &\leq C\,\|\epsilon_1\, v_{tt}\|^2_{C^1(S_+^{N-1})},\\ &\leq C\, e^{2\,(\,1+\epsilon\,)\,t}.\end{aligned}$$

Et par un procédé similaire, tous les termes du B_k^j vérifient la même estimation.

Par la suite,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_k}(\,1\,+\,\lambda_k\,)\,(\,B_k^j\,)^2\,\leq M\,e^{2\,(\,1+\epsilon\,)\,t}. \tag{4.155}$$

En utilisant l'équation sur le bord de $v\,(\,t\,,.\,)$, et l'estimation (4.140) et en intégrant sur S^{N-2} on a :

$$\begin{aligned}|D_k^j| \leq & c\,e^t\,|\int_{S^{N-2}} e_k^j\,(\,n\,e_N\,)\,(\,v_t - \frac{1}{p-1}\,v)\,+\,(\nabla_S\,v\,e_N\,)\,e_k^j\,d\sigma^{'}|\,+\,|\int_{S^{N-2}} e_k^j\,v^p\,(\,t,\sigma^{'}\,)\,d\,\sigma^{'}|\\ &+\,|\int_{S^{N-2}} e_k^j\,(v_t\,-\frac{1}{p-1}v)(\,n\nu\,)\,d\,\sigma^{'}|,\\ &\leq c_k\left(e^{(\,1+\epsilon\,)\,t}\,+\,e^{p\,\epsilon\,t}\,+\,e^{\epsilon\,t}\,e^t\right).\end{aligned}$$

Il résulte,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_k}(\,1\,+\,\lambda_k\,)\,|D_k^j|^2 \leq c\left(e^{2(\,1+\epsilon\,)\,t}\,+\,e^{2p\,\epsilon\,t}\right). \tag{4.156}$$

Étape 3 : Estimation sur $a_k^j(t)$

Traitant d'abord le cas $k \in \{0, 1, ...k_0 + 2 - N\}$. En utilisant les estimations précédentes sur les D_k^j et B_k^j, on obtient

$$\begin{aligned}a_k^j(\,t\,)^2 &\leq c\,(e^{2\,r_1(k)\,t}\,+\,e^{2\,r_2(k)\,t}\,+\,e^{2\,(1+\epsilon)\,t}\,+e^{2\,p\,\epsilon\,t}),\\ &\leq c\,(\underline{e^{2\,r_2(k)t}}\,+\,e^{2\,(1+\epsilon)\,t}\,+\,e^{2\,p\epsilon t}).\end{aligned} \tag{4.157}$$

Remarquons que le plus grand terme de la famille des bornes $(e^{2\,r_2(k)t})$ lorsque k varie est $e^{2\,\beta\,t}$, ce qui donnera

$$\sum_{k=0}^{k_0+2-N}(1+\lambda_k)\,\sum_{j=1}^{n_k}(a_k^j)^2(t)\,\leq M\Big(\,e^{2\beta t}\,+\,e^{2(1+\epsilon)\,t}\,+\,e^{2p\epsilon\,t}\,\Big). \tag{4.158}$$

Maintenant, pour $k \geq k_0 + 3 - N$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=k_0+3-N}^{\infty}(\,1\,+\,\lambda_k\,)\,\sum_{j=1}^{n_k}(a_k^j)^2 \leq c\,e^{\frac{2t}{p-1}}\sum_{k=1}^{\infty}(\,1\,+\,\lambda_k\,)\,\sum_{j=1}^{n_k}(a_k^j(0))^2\\ +\,c(e^{2\,(\,1+\epsilon\,)\,t}\,+\,e^{2\,p\,\epsilon\,t}).\end{aligned} \tag{4.159}$$

Donc,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1+\lambda_k)\sum_{j=1}^{n_k}(a_k^j(t))^2 \le c\,(e^{\frac{2t}{p-1}}+e^{2(1+\epsilon)t}+e^{2p\epsilon t}+e^{2\beta t}),$$
$$\le c\,(e^{2\beta t}+e^{2p\epsilon t}). \tag{4.160}$$

Cela est équivalent à :

$$\|v(t,.)\|_{H^1(S_+^{N-1})} \le C\Big(e^{\beta t}+e^{p\epsilon t}\Big). \tag{4.161}$$

Étape 4 : Estimation fine

Si $\beta \le p\,\epsilon$, alors dans ce cas on a directement l'estimation (4.147) voulue :

$$\|v(t,.)\|_{H^1(S_+^{N-1})} \le C\,e^{\beta t}.$$

Si $\beta > p\,\epsilon$, alors on a

$$\|v(t,.)\|_{H^1(S_+^{N-1})} \le C\,e^{p\epsilon t}. \tag{4.162}$$

Prenons $\tilde{\epsilon} = p\,\epsilon$. Par les injections de Sobolev pour $N \ge 4$,

$$\|v(t,.)\|_{L^{\frac{2(N-1)}{N-3}}(S_+^{N-1})} \le c\,e^{\tilde{\epsilon}t}.$$

Pour $\tilde{\alpha} \le \dfrac{2}{p}\,\dfrac{(N-1)}{N-3}$ on a :

$$\|v^p(t,.)\|_{L^{\tilde{\alpha}}(S_+^{N-1})} \le c\,e^{p\,\tilde{\epsilon}t}.$$

Puisque $\frac{N}{N-1} < p < \frac{N-1}{N-2}$, alors

$$2+\frac{2}{N-3} < \frac{2}{p}\,\frac{(N-1)}{N-3} < \cdots$$

On peut prendre $\tilde{\alpha} = 2$, par la théorie de régularité des équations elliptiques on déduit :

$$\|v(t,.)\|_{W^{2,2}(S_+^{N-1})} \le C\,e^{\tilde{\epsilon}t}.$$

Par conséquent :

$$\|v(t,.)\|_{L^{2^{**}}(S_+^{N-1})} \le C\,e^{\tilde{\epsilon}t}.$$

En appliquant la théorie de régularité de manière itérée, on obtient :

$$\|v(t,.)\|_{L^\infty} \le C\,e^{p\epsilon t}. \tag{4.163}$$

Qui est une estimation plus fine que (4.140). L'étape suivante consiste à répéter la procédure de preuve, en remplaçant le ϵ de l'estimation de départ (4.140) par $\tilde{\epsilon} := p\,\epsilon$. On répète ce procédé m fois jusqu'à ce qu'on a $p^m\,\epsilon > \beta$, ce qui nous donnera l'estimation (4.164) .

Pour $N = 3$ via les injections de Sobolev on obtient directement l'estimation (4.163).

□

Proposition 4.4. *Sous les mêmes hypothèses précédentes, on a*

$$\|\tilde{u}\,(\,r\,,\,.\,)\|_{L^\infty\,(S_+^{N-1})}\;\leq M\,r^{-k_0}. \tag{4.164}$$

Preuve :

Par la même démarche suivie dans l'étape 4 de la précédente preuve, on a,

$$\|v\,(\,t,.\,)\|_{H^1\,(S_+^{N-1})}\;\leq C\,e^{\beta\,t}.$$

Par les injections de Sobolev et la théorie de régularité d'équations elliptiques on déduit que :

$$\|v\,(\,t\,,.)\|_{W^{2,2}\,(S_+^{N-1})}\leq C\,e^{\beta\,t}.$$

En itérant la même procédure, on obtient l'estimation voulue.

□

Proposition 4.5. *Supposons que u est une solution de (4.1) qui vérifie :*

$$r^k\,|\,u\,(\,x\,)\,|\leq M,$$

au voisinage de 0 , où k est un entier qui appartient à $[\,N-2\,,\,k_0\,]$. Alors il existe une fonction harmonique sphérique de degré $k+2-N$ tel que :

$$\lim_{r\to 0} r^k\,\tilde{u}\,(\,r,\,\cdot\,)=\psi(\cdot),$$

cette limite est prise au sens de $C^2(S_+^{N-1})$.

Preuve :

On définit : $w\,(\,t\,,\sigma\,)\;=e^{-\beta t}\,v\,(\,t\,,\sigma\,)$, avec $\beta=\dfrac{1}{p-1}-k.$

La fonction w est une solution bornée de :

$$\begin{aligned}
&(1+\epsilon_1)\,w_{tt}\,+\Big[(N-\frac{2p}{p-1}+\epsilon_2)\;+2\,\beta\,(\,1\,+\,\epsilon_1)\Big]\,w_t\,+\Big[(l_{p,N}\;+\epsilon_3)\;+\,(1\,+\,\epsilon_1)\,\beta^2\\
&+\,\beta\,(\,N\,-\,\frac{2p}{p-1}\,+\,\epsilon_2)\Big]\,w+\;\Delta_S w+<\nabla_S w\,,\,\overrightarrow{\epsilon}_4\,+\,\beta\,\overrightarrow{\epsilon}_5><+<\nabla_S w_t\,,\,\overrightarrow{\epsilon}_5>\\
&+<\nabla_S<\nabla_S w\,,e_N>,\,\overrightarrow{\epsilon}_6>=0.\qquad dans\,(-\infty,\log R)\times S_+^{N-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big[(\beta\,-\,\frac{1}{p-1}\,)\,w+\,w_t\Big]\;<\,n,\nu\,>\,+\,<\,\nabla_S\,w,\nu\,>-\epsilon_7\Big[\Big((\,\beta-\,\frac{1}{p-1}\,)w\,+\,w_t\Big)\,<\,n\,,e_N\,>\\
&+\,<\,\nabla_S w,e_N\,>\Big]\,+\,e^{\beta\,(\,p\,-\,1\,)\,t}\,|w|^{p-1}\,w=0.\qquad sur(-\infty,\log R)\times S^{N-2}.
\end{aligned}$$

En appliquant à nouveau la méthode d'énergie utilisée dans Théorème 4.10, on déduit que la trajectoire du $w\,(\,t,.\,)$ est relativement compacte dans $C^1(\overline{S}_+^{N-1})\bigcap W^{2,r}(S_+^{N-1})$ pour tout r, la limite-α de $w(t,.)$ est un ensemble non vide compact connexe de :

$$\mathcal{A}\Big[S_+^{N-1}\Big]\;:=\Big\{z\in C^1(\overline{\mathcal{S}}_+^{N-1}):\Delta_S z+\lambda_{(k+2-N)}\;z=\;0\text{ dans }S_+^{N-1}\text{ et }<\nabla_S\,z,\nu>=0\text{ sur }S^{N-2}\Big\}.$$

Reste à montrer la convergence $w(t,.)$ vers sa limite-alpha , pour cela on va procéder par projection de l'équation vérifiée par $w(t,.)$ sur $\mathcal{A}\Big[S_+^{N-1}\Big]$. Soit $e^j_{(k+2-N)} \in \mathcal{A}\Big[S_+^{N-1}\Big]$.

On pose $w(\,t\,,\,.\,) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_l} b_l^i\,(t)\,e_l^i$.

Par la suite $(\,b^j_{(k+2-N)}\,)$ vérifie :

$$(\,b^j_{(k+2-N)}\,)''\,(\,t\,) + (\,N\,-\,\frac{2\,p}{p\,-1}\,+2\,\beta\,)\,(\,b^j_{(k+2-N)}\,)'\,(\,t\,) = L^j_{(k+2-N)}\,+\,M^j_{(k+2-N)},$$

avec :

$$L^j_{(k+2-N)}\;=\;-\int_{S_+^{N-1}} e^j_{(k+2-N)}\Big(\epsilon_1\,w_{tt}\,+\,2\,\beta\,\epsilon_1\,w_t\,+\,(\epsilon_3\,+\epsilon_1\,\beta^2\,+\,\beta\,\epsilon_2)\,w\,+(\nabla_S w,\overrightarrow{\epsilon_4}\,+\beta\,\overrightarrow{\epsilon_5})$$
$$+\,(\nabla_S\,w_t\,,\,\overrightarrow{\epsilon_5})\,+,\,(\nabla_S(\nabla_S\,w\,,e_N)\,,\overrightarrow{\epsilon_6})\Big)\;d\sigma,$$

et,

$$M^j_{(k+2-N)}\;=\;-\int_{S^{N-2}}\frac{\partial\,w}{\partial\,\phi}\;e^j_{(k+2-N)}\;d\,\sigma'.$$

D'après les estimations sur les (ϵ_j) on a :

$$|L^j_{(k+2-N)}\,|\le\;C\,e^t.$$

Rappelons que :

$$\beta=\frac{1}{p-1}\,-\,k,$$
$$-\,\tau:=N\,-\,\frac{2\,p}{p-1}\,+\,2\,\beta\;=\;N-2-2k<0.$$

On trouve :

$$(\,b^j_{(k+2-N)}\,)'\,(\,t\,) = e^{\tau\,t}\,(b^j_{(k+2-N)})'(0)\,-\,e^{\tau\,t}\int_t^0 e^{-\,\tau\,s}\,(\,L^j_{(k+2-N)}\,+\,M^j_{(k+2-N)}\,)\,ds.$$

Qui est intégrable entre $(-\infty,\log R)$, ce qui fait que les coefficients $(b^j_{(k+2-N)})$ admet une limite finie quand $t\to-\infty$.

■

Proposition 4.6. *Supposons que u est une solution de (4.1) qui vérifie,*

$$\lim_{x\to 0}|x|^k\,u\,(x) = 0, \tag{4.165}$$

pour un certain entier $k\in[N-2,k_0]$. *Alors*

i) Si $k=N-2$, $u=0$.

ii) Si $k>N-2$, *il existe une constante* $M>0$ *tel qu'on a l'estimation*

$$|x|^{k-1}\,|u(x)|\;\le\;M, \tag{4.166}$$

au voisinage de 0.

Preuve :

i) Dans le cas où $\lim_{x\to 0} |x|^{N-2}\, u(x) = \alpha$, la fonction u est prolongeable au point 0 comme une solution v de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \ \ dans \ \ \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} + |v|^{p-1}\, v = c_N\, \alpha\, \delta_0 \ \ sur \ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.167}$$

Donc, si $\alpha = 0$, la fonction u est nécessairement nulle.

ii) Supposons que $k > N-2$. On suivra la même démarche dans la preuve du Proposition 4.3, où le ϵ issue de Proposition 4.2 est remplacé par $\beta := 1/(p-1) - k$ (l'estimation (4.140) dans ce cas est plus facile à avoir, puisqu'elle est une conséquence directe de l'hypothèse (4.165)). l'estimation (4.147) qu'on cherche à démontrer est remplacée par,

$$\|\tilde{u}(r,.)\|_{H^1(S_+^{N-1})} \leq M\, r^{1-k}. \tag{4.168}$$

Avec la même définition de v qu'en Proposition 4.3, on pose

$$v(t,.) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_l} a_l^j(t)\, e_l^j \ \ \text{dans} \ \ S_+^{N-1}.$$

Les deux estimations (4.155) ;(4.156) sont remplacées par,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_l} (\,1 + \lambda_l\,)\,(\,B_l^j\,)^2 \ \leq M\, e^{2\,(\,1+\beta\,)\,t}, \tag{4.169}$$

et,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_l} (\,1 + \lambda_l\,)\,|D_l^j|^2 \leq c\, e^{2p\,\beta\, t}. \tag{4.170}$$

La différence principale qui apparaît dans ce cas, est la forme particulière de $a_l^j(t)$ pour $l \in \{k+2-N, ..., k_0+2-N\}$. En effet,

$$a_l^j(t) = a\, e^{r_1(l)\,t} \ + b\, e^{r_2(l)\,t}$$
$$- (r_2 - r_1)^{-1} \int_t^0 e^{r_1\,(t-s)}\,(B_l^j \ + D_l^j)(s)ds \,-(r_1 - r_2)^{-1} \int_t^0 e^{r_2\,(t-s)}\,(B_l^j \ + D_l^j)(s)ds \tag{4.171}$$

où,

$$r_1(l) = \frac{1}{p-1} + l \qquad \text{et} \qquad r_2(l) = \frac{1}{p-1} + 2 - N - l. \tag{4.172}$$

Afin que l'hypothèse (4.165) soit vérifier, il est nécessaire que $b = 0$.

Comme conséquence, on obtient les estimations suivantes,

(1) pour $l \in \{0, 1, ..., k+1-N\}$,

$$\sum_{l=0}^{k+1-N} (1+\lambda_l) \sum_{j=1}^{n_l} (a_l^j)^2(t) \ \leq M\Big(e^{2\,p\,\beta\, t} \ + \underline{e^{2\,(1+\beta)\,t}}\Big), \tag{4.173}$$

(2) pour $l \in \{k+2-N, ..., k_0+2-N\}$,

$$\sum_{l=k+2-N}^{k_0+2-N} (1+\lambda_l) \sum_{j=1}^{n_l} (a_l^j)^2(t) \ \leq M\, e^{2\,p\,\beta\, t}, \tag{4.174}$$

(3) Pour $l \geq k_0 + 3 - N$,

$$\sum_{l=k_0+3-N}^{\infty} (1+\lambda_l) \sum_{j=1}^{n_l} (a_l^j)^2(t) \leq M\, e^{2\,p\,\beta\,t}. \tag{4.175}$$

En utilisant le même procédé itérative dans Proposition 4.4, on arrive à la conclusion,

$$\|v(t,.)\|_{L^\infty(S_+^{N-1})} \leq c\, e^{(1+\beta)\,t}. \tag{4.176}$$

Ceci est la partie ii).

■

Démonstration du Théorème 4.12

Le Théorème 4.12 est une conséquence de Propositions 4.2 jusqu'à 4.6. On annonce la preuve de ce théorème par l'algorithme suivant.

À la première étape, on utilise les résultats de Propositions 4.2, 4.3 et 4.4 dans Proposition 4.5, et en posant $k = k_0 + 2 - N$ on conclut,

(I) Il existe une fonction harmonique sphérique ψ_k de degré k tel que

$$\lim_{r\to 0} r^{k+N-2}\, \tilde{u}(r,\cdot) = \psi_k(\cdot), \tag{4.177}$$

dans $C^2(S_+^{N-1})$.

Par conséquent,

(**I**.1) Si $\psi_k \neq 0$, on a bien le résultat du théorème,

(**I**.2) Si $\psi_k = 0$, alors en appliquant le résultat du Proposition 4.6, deux sous-cas se présentent,

(**I**.2.1) <u>*sous-cas 1 :*</u> $k = 0$, alors $u = 0$, et c'est la partie i) du théorème,

(**I**.2.2) <u>*sous-cas 2 :*</u> $k > 0$, alors on retourne à **(I)** et cela en remplaçant k par $k-1$.

Cette boucle itérative finie a deux tests d'arrêts ; $k = 0$ ou bien $\psi_k \neq 0$.

Le théorème vient d'être montrer.

■

4.4.3 Cas particulier de la dimension deux

Lorsque la dimension N est égale à deux, on a le résultat analogue suivant, dont sa particularité est de permettre une classification "complète" de singularité.

Théorème 4.13. *On suppose $N = 2$. Soit $u \in C^1(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ une solution de (4.78) qui vérifie l'estimation (4.80). Si $\dfrac{1}{p-1} \notin \mathbb{N}$ alors* *(i) Soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{\log|x|} = -\alpha, \tag{4.178}$$

et u se prolonge en 0 comme étant une solution de

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \quad dans \quad \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} + |v|^{p-1}\, v = \pi\, \alpha\, \delta_0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.179}$$

(ii) Ou bien

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\frac{1}{p-1}} u(x) = \omega(\sigma), \tag{4.180}$$

uniformément par rapport à σ, où ω est l'une de deux solutions non nulle de (4.5).

Preuve du Théorème 4.13 :

On va suivre la même preuve du Théorème 4.11 et Théorème 4.12. L'objectif de l'actuelle preuve est de préciser les modifications à apporter.

Puisque l'ensemble de solutions de l'équation (4.5) est constitué de trois éléments (Théorème 4.2), et comme conséquence du Théorème 4.10, $|x|^{\frac{1}{p-1}} u(x)$ converge soit vers l'une des solutions non nulle de (4.5) ou bien il converge vers 0.

Cas 1 : Singularité forte :

Si

$$|\, x \,|^{\frac{1}{p-1}}\, u\,(\, x\,) \longrightarrow \omega(\cdot), \tag{4.181}$$

où ω est une solution non nulle de (4.5), alors dans ce cas on a une singularité forte du problème (4.1) et c'est la partie (ii) du Théorème 4.13 .

Cas 2 : Singularité faible :

$$|\, x \,|^{\frac{1}{p-1}}\, u\,(\, x\,) \longrightarrow 0. \tag{4.182}$$

Proposition 4.7.

$$(\, \exists\, \epsilon \, > \, 0\,) \qquad |\, \tilde{u}\,(\, x\,)|\;\; r^{\frac{1}{p-1}} \;\leq C\, r^{\epsilon} \tag{4.183}$$

au voisinage de 0 .

Preuve de la proposition : La même preuve de Proposition 4.2 est valide.

Proposition 4.8.

$$(\exists M > 0) \quad \|v(t,.)\|_{L^\infty(S_+^{N-1})} \leq M\, |t|\, e^{\frac{t}{p-1}}. \tag{4.184}$$

Preuve de Proposition 4.8 :

Soit v la fonction définie par :

$$\tilde{u}(r,\theta) = r^{-\frac{1}{p-1}}\, v(t,\theta), \quad \text{avec} \quad t = \log r \quad \text{et} \quad \theta \in (0,\pi). \tag{4.185}$$

La fonction v vérifie pour $(t,\theta) \in (-\infty, \log R^{'}) \times (0,\pi)$

$$(1+\epsilon_1)\, v_{tt} + \left(-\frac{2}{p-1} + \epsilon_2 \right) v_t + (l_{p,2} + \epsilon_3)\, v + v_{\theta\theta} + (\nabla_s v . \overrightarrow{\epsilon}_4) + (\nabla_s v_t . \overrightarrow{\epsilon}_5) \tag{4.186}$$

$$+ (\nabla_s (\nabla_s v . e_n) . \overrightarrow{\epsilon}_6) = 0. \tag{4.187}$$

Et sur $(-\infty, \log R^{'}) \times \partial S^1_+$, la fonction v vérifie,

$$(v_t - \frac{1}{p-1} v)\epsilon_8 \; - \; \epsilon_7 \Big[(v_t - \frac{1}{p-1} v)(\overrightarrow{n}.e_n) + (\nabla_s v . e_n) \Big] \; + \; (\nabla_s v . \nu) + |v|^{p-1} v = 0. \tag{4.188}$$

Considérons le développement en série de Fourier de $v(t,.)$,

$$v\,(\,t\,,.\,) \; = \sum_{k=0}^{\infty} \; a_k\,(\,t\,)\, e_k \;\; \text{dans} \;\; S^1_+. \tag{4.189}$$

Avec $e_k = c_k \; \cos k\theta$, et que $\|e_k\|_{H^1(0,\pi)} = 1$. (voir Appendice 5.4)

Prouvons d'abord l'estimation

$$\sum_{k=0}^{\infty} \; (\,1 \; + \; \lambda_k\,)\,(\,a_k\,(\,t\,))^2 \; \leq M\,|t|^2. \tag{4.190}$$

Lorsqu'on projette l'équation vérifie par $v(t,.)$ sur les espaces propres, on obtient ,

$$(\,a_k\,(\,t\,))^{''} \; - \; \frac{2}{p-1} (\,a_k\,(\,t\,))^{'} \; + \; \left(\frac{1}{(p-1)^2} \; - k^2 \right) a_k\,(\,t\,) \; + \; B_k\,(\,t\,) \; + \; D_k\,(\,t\,) = 0$$
$$\text{sur } (-\infty\,, \log R), \tag{4.191}$$

avec :

$$B_k = \int_{S^{N-1}_+} e_k\,(\,\epsilon_1\, v_{tt} \; + \; \epsilon_2\, v_t \; + \; \epsilon_3\, v \; + (\nabla^{'}\, v\, \overrightarrow{\epsilon_4}) \; + \; (\nabla^{'}\, v_t\, \overrightarrow{\epsilon_5}) \; + \; (\nabla^{'}\,(\nabla^{'} v\, e_N)\, \overrightarrow{\epsilon_6})\,)\, d\sigma,$$

$$D_k = \int_{\partial S^{N-1}_+} e_k\, (\nabla^{'} v\, \overrightarrow{\nu})\, d\,\sigma^{'}.$$

Étape 1 : Résolution de (4.191) : Les nombres

$$\begin{cases} (\,i\,) \qquad r_1 = \dfrac{1}{p-1} \; + \; k \\[2ex] (\,ii\,) \qquad r_2 = \dfrac{1}{p-1} \; - \; k. \end{cases} \tag{4.192}$$

pour $k \in \mathbf{N}$; sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$X^2 \; - \; \frac{2}{p-1} X \; + \; \frac{1}{(p-1)^2} \; = k^2.$$

Pour $k = 0$, $r_1 = r_2 = \dfrac{1}{p-1}$, par conséquent le coefficient a_0 est exprimé par,

$$a_0(t) = a_0(0)\; e^{\frac{t}{p-1}} \; + \; \left(a^{'}_0(0) - \frac{1}{p-1} a_0(0) \right) t\, e^{\frac{t}{p-1}} \; - \; \int_t^0 \int_s^0 e^{\frac{1}{p-1}(t-\tau)}\, (B_0 + D_0)(\tau)\, d\tau\, ds. \tag{4.193}$$

Si $k \geq 1$ tel que $r_2 = \dfrac{1}{p-1} - k \geq 0$, alors

$$a_k(t) = (r_1 - r_2)^{-1} \,(a_k^{'}(0) - r_2\, a_k(0))\, e^{r_1\, t} \,+ (r_2 - r_1)^{-1} (a_0^{'}(0) - r_1\, a_0(0))\, e^{r_2\, t}$$
$$- (r_2 - r_1)^{-1} \int_t^0 e^{r_1\,(t-s)}\, (B_k \,+ D_k)(s) ds \,- (r_1 - r_2)^{-1} \int_t^0 e^{r_2\,(t-s)}\, (B_k \,+ D_k)(s) ds. \quad (4.194)$$

Si $k \geq 1$ tel que $r_2 = \dfrac{1}{p-1} - k \leq 0$, alors

$$a_k(t) = a_k(0)\, e^{r_1\, t} \,+ (r_1 - r_2)^{-1}\, e^{r_1\, t} \int_t^0 (e^{-r_1\, s} - e^{-r_2\, s})\, (B_k \,+ D_k)(s) ds$$
$$- (r_1 - r_2)^{-1} (e^{r_1\, t} - e^{r_2\, t}) \int_{-\infty}^t e^{-r_2\, s}\, (B_k \,+ D_k)(s) ds. \quad (4.195)$$

Par la même méthode utilisée pour $N \geq 3$, on déduit que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda_k)(B_k)^2 \leq M e^{2(1+\epsilon)t}, \quad (4.196)$$

et,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda_k)\ (D_k)^2 \leq c\Big(e^{2(1+\epsilon)t} + e^{2p\epsilon t}\Big). \quad (4.197)$$

On dénote k_0 le plus grand entier inférieure à $\dfrac{1}{p-1}$. Soit $\gamma = \dfrac{1}{p-1} - k_0$.

Étape 2 : Estimations sur les $a_k(t)$

On a :

$$a_0(t)^2 \leq c\ (\ e^{2r_1 t} + t^2 e^{2r_1 t} + e^{2p\epsilon t} + e^{2(1+\epsilon)t}\ )$$
$$\leq C\ t^2\, e^{\frac{2\,t}{p-1}}. \quad (4.198)$$

Les estimations pour $k \geq 1$ se font d'une manière analogue au cas où $N \geq 3$.

Finalement,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k)^2(t) \leq c(\, e^{\frac{2\,t}{p-1}} + e^{2\gamma t} + t^2 e^{\frac{2t}{p-1}} + e^{2(1+\epsilon)t} + e^{2p\epsilon t}) \quad (4.199)$$
$$\leq c\, |t|^2\, e^{\frac{2t}{p-1}}. \quad (4.200)$$

De la formule de Parseval, ceci est équivalent à,

$$\|v(t,.)\|_{H^1(S^1_+)} \leq M\, |t|\, e^{\frac{t}{p-1}}. \quad (4.201)$$

En utilisant l'injection de Morrey, on a pour $\alpha = 1/2$:

$$\|v(t,.)\|_{C^{0,\alpha}(\ \overline{S^1_+}\ )} \leq M\ |t|\, e^{\frac{t}{p-1}}. \quad (4.202)$$

□

La preuve du Théorème 4.13 est achevée par la proposition suivante.

Proposition 4.9. *Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{\log r} = -\alpha. \tag{4.203}$$

Preuve de Proposition 4.9

Avec les mêmes notations précédentes, considérons le changement d'inconnue :

$$v(t,\theta) = \eta(t)\ w(t,\theta) \ \text{ pour } \ \eta(t) = -t\ e^{\frac{t}{p-1}}. \tag{4.204}$$

Ainsi, la fonction w est une solution bornée de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&(1+\epsilon_1)\ w_{tt} + \Big[(-\frac{2}{p-1} + \epsilon_2) + 2(1+\epsilon_1)(\frac{\eta_t}{\eta})\Big] w_t + \Big[(\frac{1}{(p-1)^2} + \epsilon_3) + (1+\epsilon_1)(\frac{\eta_{tt}}{\eta}) \\
&+ (-\frac{2}{p-1} + \epsilon_2)(\frac{\eta_t}{\eta})\Big] w + \Delta_S w + < \nabla_S w\,,\ \overrightarrow{\epsilon}_4 + (\frac{\eta_t}{\eta})\overrightarrow{\epsilon}_5 > + < \nabla_S w_t\,,\ \overrightarrow{\epsilon}_5 > \\
&+ < \nabla_S < \nabla_S w\,, e_N >\,,\ \overrightarrow{\epsilon}_6 > = 0 \qquad \mathit{dans}\,(-\infty, \log R^{'}) \times S^1_+,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big((\frac{\eta_t}{\eta}) - \frac{1}{p-1}\Big) w + w_t\Big]\epsilon_8 + < \nabla_S\, w, \nu > - \epsilon_7 \Big[\Big(((\frac{\eta_t}{\eta}) - \frac{1}{p-1})w + w_t\Big) < n\,, e_N > \\
&+ < \nabla_S w, e_N > \Big] + \eta^{p-1}\,|w|^{p-1}\, w = 0. \qquad \mathit{sur}(-\infty, \log R^{'}) \times \{0, \pi\},
\end{aligned}$$

où :

$$\frac{\eta_t}{\eta} = \frac{t\ +\ (p-1)}{(p-1)\ t},$$

$$\frac{\eta_{tt}}{\eta} = \frac{t\ +\ 2(p-1)}{(p-1)^2\ t}.$$

Avec la même méthode d'énergie utilisée précédemment en dimension supérieure à trois, lorsque $t \to -\infty$, la courbe $w(t,.)$ converge vers la solution φ du problème :

$$\begin{cases} \Delta_s \varphi = 0. & \theta \in (0,\pi) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0. & \theta \in \{0,\pi\}. \end{cases}$$

Ce qui entraîne que $\varphi \in \mathbb{R}$.

■

Bibliographie

[1] R.A.Adams , J.F.Fournier.*Sobolev spaces*, Second Edition, Pure and Applied Mathematics, 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] D.R.Adams, L.I.Hedberg . *Function Spaces and Potential Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **31**, Springer-Verlag (1996).

[3] P.Baras and M.Pierre. *Singularités éliminables pour des équations semi-linéaire*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **34** (1984), 185-206.

[4] Ph.Bénilan, L.Boccardo, T.Gallouët, R.Gariepy, M.Pierre, J.L.Vázquez. *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **22** (1995), no. 2, 241-273.

[5] Ph.Benilan, H.Brezis, M.G.Crandall. *A semilinear equation in $L^1(R^N)$*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 2, n **4**. (1975), p.523-555.

[6] Ph.Bénilan and H.Brezis. *Nonlinear problems related to the Thomas-Fermi equation*, Dedicated to Ph.Bénilan. J.Evol. Equ.**3** (2004), 673-770.

[7] M.F.Bidaut-Véron, L.Vivier. *An elliptic semilinear equation with source term involving boundary measures : the subcritical case*, Rev. Mat. Iberoamericana **16** (2000), 477-513.

[8] L.Boccardo, T.Gallouët. *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. **87** (1989), 149-169.

[9] Y.O.Boukarabila, L.Véron. *Nonlinear boundary value problems relative to harmonic functions*, (travail en préparation).

[10] H.Brezis, M.Marcus, A.C.Ponce. *Nonlinear elliptic equations with measures revisited.* Mathematical aspects on nonlinear dispersive equations (Annals of Mathematics Studies, 163), 2007, pp.55-110. The results were announced by the authors in *A new concept of reduced measure for nonlinear elliptic equations*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **339** (2004), 169-174.

[11] H.Brezis, A.C.Ponce. *Reduced measures on the boundary*, J. Funct. Anal. **229** (2005), 95-120.

[12] H.Brezis, A.C.Ponce. *Kato's inequality up to the boundary.* Commun. Contemp. Math. (2008). 1-22.

[13] H.Brezis, W.Strauss. *Semilinear second-order elliptic equations in L^1*, J.Math. Soc. Japan **25** (1970), 565-590.

[14] H.Brezis, L.Véron. *Removable singularities of some nonlinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **75** (1980), 1-6.

[15] H.Brezis. *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[16] H.Brezis. *Problèmes elliptiques et paraboliques non linéaires avec données mesures*, Goulaouic-Meyer-Schwartz Seminar, 1981/1982, 1982. Exp. No. XX, 13.

[17] H.Brezis. *Problèmes unilatéraux.* Université Paris VI, (thèse), 1972.

[18] L.Caffarelli, L.Silvestre. *An extention problem related to the fractional Laplacian*, arXiv :0608640v2 [math.AP](13 February 2007).

[19] X.Y.Chen, H.Matano, L.Véron. *Anisotropic Singularities of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in* $\mathbb{R}^2$, Journal Of Functional Analysis **83** (1989). 50-97.

[20] H.Chen, L.Véron. *Semilinear fractional elliptic equations involving measures*, J.Differential Equations **257** (2014). 1457-1486.

[21] H.Chen, L.Véron. *Singular solutions of fractional elliptic equations with absorption*, arXiv :1302.1427v1, [math.AP], (6 February, 2013).

[22] D.Feyel and A. de la Pradelle. *Topologies fines et compactifications associées à certains espaces de Dirichlet*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **27** (1977), 121-146.

[23] B.Gidas, J.Spruck. *Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, comm. Pure. Appl. Math. **34**, 525-598 (1980).

[24] D.Gilbarg, N.S.Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Grundlehren der mathematischen Wissenchaften 224, Springer-Verlag (2001).

[25] A.Gmira, L.Véron.*Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equations.* Duke Mathematical Journal, vol **64**, no 2 (1991), 271-324.

[26] J.Kauhanen, P.Koskela, J.Malỳ. *On functions with derivatives in a Lorentz space.* J.Manuscripta Math. **100**, 87-101 (1999).

[27] J.B.Keller. *On solutions of* $\Delta u = f(u)$. Communications on pure and applied mathemarics, vol **x**, 503-510 (1957).

[28] J.L.Lions, J.Peetre. *Sur une classe d'espaces d'interpolation.* Publications mathématiques de l.I.H.E.S., tome 19 (1964), p.5-68.

[29] M.Marcus, L.Véron. *Nonlinear Second Order Elliptic Equations Involving Measures.*De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. Volume **21** (2013), xiv+248.

[30] R.Osserman. *On the inequality* $\Delta u \geq f(u)$. Pacific J.Math. **7**, p :1641-1647 (1957).

[31] A.C.Ponce. *Selected problems on elliptic equations involving measures.* arXiv :1204.0668v2[math.AP], 04 Jul 2014.

[32] P.Quittner, W.Reichel. *Very weak solutions to elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions.* Calc. Var. **32** (2008) pp. 429-452.

[33] G.Stampacchia. *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* Presses de l'Université de Montréal, 1966.

[34] E.M.Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[35] H.Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North Holland (1978).

[36] J.L.Vazquez. *On a semilinear equation in* $\mathbb{R}^2$ *involving bounded measures*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **95A** (1983). 181-202.

[37] L.Véron. *Elliptic equations involving measures.* Stationary Partial Differential Equations, Volume1. Handbook Of Differential Equations. North-Holland, Amsterdam, 2

[38] L.Véron. *Geometric invariance of singular solutions of some nonlinear partial differential equations*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. **38**, No 1 (1989).

[39] L.Véron. *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 353, 1996.

[40] M.Willem. *Principes d'analyse fonctionnelle*, Nouvelle Bibliothèque Mathématique, 9, Cassini, Paris, 2007.

Chapitre 5

Appendices

5.1 Étude de l'équation stationnaire dans un cas générale de domaine sphérique

On considère G un domaine régulier de S^{N-1} et $p > 1$.

L'objectif de cet appendice est de donner certains résultats sur la famille d'équations $(E_\lambda)_\lambda$,

$$\begin{cases} \Delta_S v \,+\, \lambda\, v = 0 \quad \text{dans} \quad G, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} \,+\, v^p \,= 0 \quad \text{sur} \quad \partial G, \end{cases} \tag{5.1}$$

lorsque λ varie dans $]0, \lambda_{1,G}[$, où $\lambda_{1,G}$ dénote la première valeur propre du $-\Delta_S$ sur $H_0^1(G)$. On décrira plus loin le comportement de v_λ lorsque λ est proche de 0, et de $\lambda_{1,G}$, respectivement.

On dénote,

$$J_G(v) := \frac{1}{2}\int_G |\nabla_S v|^2 \, dS(\sigma) \,+\, \frac{1}{p+1}\int_{\partial G} |v|^{p+1}\, dS(\sigma'), \tag{5.2}$$

définie sur $H^1(G) \cap L^{p+1}(\partial G)$. Et, pour $\gamma > 0$ on dénote,

$$\Sigma_{G,\gamma} = \Big\{ v \in H^1(G) \cap L^{p+1}(\partial G) : \int_G v^2 \, dS(\sigma) = 2\gamma \Big\}. \tag{5.3}$$

Soit,

$$m_\gamma = \min\{J_G(v) : v \in \Sigma_{G,\gamma}\}. \tag{5.4}$$

Il est claire que $m_\gamma \geq 0$. En calculant $J_G(c_\gamma)$ pour $c_\gamma = \sqrt{2\gamma/|G|} \in \Sigma_{G,\gamma}$, ceci entraîne

$$m_\gamma \leq J_G(c_\gamma) = \frac{|\partial G|}{p+1}\left(\frac{2\gamma}{|G|}\right)^{(p+1)/2}.$$

Si $\{v_n\}$ est une suite minimisante, alors elle est bornée dans $H^1(G) \cap L^{p+1}(\partial G)$. Par les résultats de compacité (Rellich-Kondrachov,réflexivité de $H^1(G) \cap L^{p+1}(\partial G)$), la suite $\{v_n\}$ admet une sous suite qui converge faiblement dans $H^1(G) \cap L^{p+1}(\partial G)$ et fortement dans $L^2(G)$ vers un élément v qui peut être considérer positive et qui vérifie $v \in \Sigma_{G,\gamma}$. À partir de la semi continuité inférieure de la norme pour la topologie faible, on conclut que $m_\gamma = J_G(v)$. Si $m_\gamma = 0$ alors v

est nécessairement nulle, ce qui est impossible puisque $0 \notin \Sigma_{G,\gamma}$. Par conséquent $m_\gamma > 0$ et il existe un multiplicateur de Lagrange μ_γ tel que pour tout $\eta \in H^1(G) \cap L^{p+1}(\partial G)$,

$$\int_G \nabla_S v.\nabla_S \eta \, dS(\sigma) + \int_{\partial G} v^p \eta \, dS(\sigma^{'}) = \mu_\gamma \int_G v\eta \, dS(\sigma). \tag{5.5}$$

En prenant $\eta = v$, on obtient,

$$\int_G |\nabla_S v|^2 \, dS(\sigma) + \int_{\partial G} v^{p+1} \, dS(\sigma^{'}) = 2\gamma\mu_\gamma. \tag{5.6}$$

En combinant cette estimation avec le fait que $m_\gamma = J_G(v)$, on déduit,

$$m_\gamma + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_{\partial G} v^{p+1} \, dS(\sigma^{'}) = \gamma\mu_\gamma. \tag{5.7}$$

Ce qui montre que $m_\gamma < \gamma\, \mu_\gamma$. On conclut de la formulation faible (5.5) que v est une solution classique du problème,

$$\begin{cases} \Delta_S v + \mu_\gamma v = 0 \;\; dans \;\; G \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} + v^p = 0 \;\; sur \;\; \partial G. \end{cases} \tag{5.8}$$

Remarquons le fait que si $w \in \Sigma_{G,\gamma}$ alors $\sqrt{\gamma'/\gamma}\, w \in \Sigma_{G,\gamma'}$, on dénote par v_γ le minimum du fonctionnelle J_G associée à la constante γ. Supposons que $\gamma^{'} > \gamma$, donc $\sqrt{\gamma/\gamma'} v_{\gamma'} \in \Sigma_{G,\gamma}$, et on a,

$$\begin{aligned} m_\gamma &\leq J_G(\sqrt{\gamma/\gamma'}\, v_{\gamma'}), \\ &\leq \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)\left[\frac{1}{2}\int_G |\nabla_S v_{\gamma'}|^2 \, dS(\sigma) + \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{p+1}\int_{\partial G} |v_{\gamma'}|^{p+1} \, dS(\sigma^{'})\right], \\ &< \left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right) J_G(v_{\gamma'}). \end{aligned}$$

D'où,

$$\gamma^{'} > \gamma \Longrightarrow \frac{m_{\gamma'}}{\gamma^{'}} > \frac{m_\gamma}{\gamma}. \tag{5.9}$$

Multiplions l'équation (5.8) par $\psi_{1,G}$, où $\psi_{1,G}$ dénote la première fonction propre positive normalisée du $-\Delta_S$ dans $H_0^1(G)$,

$$(\mu_\gamma - \lambda_{1,G}) \int_G \psi_{1,G} v \, dS(\sigma) - \int_{\partial G} \frac{\partial \psi_{1,G}}{\partial n} v \, dS(\sigma^{'}) = 0. \tag{5.10}$$

On conclut donc,

$$\mu_\gamma < \lambda_{1,G}. \tag{5.11}$$

À partir de (5.9), la fonction $\gamma \mapsto m_\gamma$ est strictement croissante. En plus, m_γ a pour limite 0 lorsque $\gamma \to 0$ et ∞ lorsque $\gamma \to \infty$. Le même argument d'unicité donné dans Proposition4.1 est valable (éventuellement il faut juste changer le domaine d'intégration de S_+^{N-1} à G). Donc, si $\mu_\gamma = \mu_{\gamma'}$, alors les minimums associés v_γ et $v_{\gamma'}$ respectivement sont égaux, par la suite $\gamma = \gamma^{'}$.

Afin d'investir le comportement de $\gamma \mapsto \mu_\gamma$ on dénote $w_\gamma = v_\gamma/\sqrt{\gamma}$. On a alors

$$\int_G w_\gamma^2 \, dS(\sigma) = 2,$$

et,

$$\begin{cases} \Delta_S w_\gamma \,+\, \mu_\gamma w_\gamma = 0 \;\; dans \;\; G \\ \dfrac{\partial w_\gamma}{\partial n} \,+\, \gamma^{(p-1)/2} w_\gamma^p \,= 0 \;\; sur \;\; \partial G. \end{cases} \tag{5.12}$$

Par la suite,

$$\int_G |\nabla_S w_\gamma|^2 \, dS(\sigma) \,+\, \gamma^{(p-1)/2} \int_{\partial G} |w_\gamma|^{p+1} \, dS(\sigma') \;=\; 2\mu_\gamma. \tag{5.13}$$

Puisque μ_γ est bornée, ceci entraîne que

$$\lim_{\gamma \to 0} \gamma^{(p-1)/2} \int_{\partial G} w_\gamma^p \, dS(\sigma') = 0. \tag{5.14}$$

Si $\mu_0 = \lim\limits_{\gamma_n \to 0} \mu_{\gamma_n}$ et si $w_0 = \lim\limits_{\gamma_n \to 0} w_{\gamma_n}$ (la limite faible dans $H^1(G)$) alors

$$\begin{cases} \Delta_S w_0 \,+\, \mu_0 w_0 = 0 \;\; dans \;\; G, \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial n} = 0 \;\; sur \;\; \partial G. \end{cases} \tag{5.15}$$

Puisque $w_0 \geq 0$ et

$$\int_G w_0^2 \, dS(\sigma) = 2,$$

alors $\mu_0 = 0$ et donc w_0 est une constante non nulle. Finalement $\lim\limits_{\gamma \to 0} \mu_\gamma = 0$.

Si $\{\gamma_n\}$ est une suite de nombres positives qui converge vers le nombre γ et puisque $m_{\gamma_n} < \gamma_n \mu_{\gamma_n} < \lambda_{1,G} \gamma_n$ alors la suite $\{m_{\gamma_n}\}$ est bornée, par conséquent la suite de minimums v_{γ_n} est bornée dans $H^1(G) \cap L^{p+1}(\partial G)$, et à partir de la compacité ; il existe un élément v qui est la limite faible dans $H^1(G) \cap L^{p+1}(\partial G)$ de $\{v_{\gamma_n}\}$ et la limite forte de la suite $\{v_{\gamma_n}\}$ dans $L^2(G)$, en particulier $\int_G v^2 \, dS(\sigma) = 2\gamma$. Lorsque $n \to \infty$, les termes d'intégrations dans la formulation faible des solution v_{γ_n} (formule 5.5) convergent, il en résulte que μ_{γ_n} converge , et on a pour tout $\eta \in H^1(G) \cap L^{p+1}(\partial G)$,

$$\int_G \nabla_S v_\gamma . \nabla_S \eta \, dS(\sigma) \,+\, \int_{\partial G} v_\gamma^p \eta \, dS(\sigma') \;=\; (\lim_{n \to \infty} \mu_{\gamma_n}) \int_G v_\gamma \eta \, dS(\sigma). \tag{5.16}$$

C'est à dire que v est une solution de l'équation

$$\begin{cases} \Delta_S v \,+\, (\lim\limits_{n \to \infty} \mu_{\gamma_n}) \, v = 0 \;\; dans \;\; G \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} \,+\, v^p \,= 0 \;\; sur \;\; \partial G. \end{cases} \tag{5.17}$$

On a déjà vu qu'il existe une solution unique associée à chaque problème (E_λ), et puisque $\int_G v^2 \, dS(\sigma) = 2\gamma$, on conclut que $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_{\gamma_n} = \gamma$, ce qui donnera la continuité de l'application $\gamma \mapsto \mu_\gamma$.

Cette continuité combinée avec le fait que $\gamma \mapsto \mu_\gamma$ est une application injective, permet d'affirmer que $\gamma \to \mu_{\gamma_n}$ est strictement croissante.

Soit maintenant, $\mu_\infty := \lim_{\gamma \to \infty} \mu_\gamma$. Il est claire que $\mu_\infty \leq \lambda_{1,G}$. Supposons que $\mu_\infty < \lambda_{1,G}$, considérons à nouveau la fonction w_γ définie précédemment. À une sous suite $\{\gamma_k\}$, on peut supposer que $\lim_{k \to \infty} w_{\gamma_k} = w_\infty$ (cette limite est au sens de $H^1(G)$ faible). En intégrant les termes de l'équation (5.12) ,

$$\mu_\gamma \int_G w_\gamma \, dS(\sigma) = \gamma^{(p-1)/2} \int_{\partial G} w_\gamma^p \, dS(\sigma'). \tag{5.18}$$

Donc $\gamma^{(p-1)/2}w_\gamma^p$ est bornée dans $L^1(\partial G)$ lorsque $\gamma \to \infty$. Si on multiplie l'équation (5.12) par $\Delta_S w_\gamma$ et on effectue une intégration par partie,

$$\int_G |\Delta_S w_\gamma|^2 \, dS(\sigma) - \mu_\gamma \int_G |\nabla_S w_\gamma|^2 \, dS(\sigma) = \gamma^{(p-1)/2}\mu_\gamma \int_{\partial G} |w_\gamma|^{p+1} \, dS(\sigma'). \tag{5.19}$$

Cela combiné avec (5.13) entraîne que $\Delta_S w_\gamma$ est bornée dans $L^2(G)$. Si $\eta \in C^2(\overline{G})$, alors

$$\int_G w_\gamma \Delta_S \eta \, dS(\sigma) + \int_{\partial G} \frac{\partial w_\gamma}{\partial n} \eta \, dS(\sigma') - \int_{\partial G} \frac{\partial \eta}{\partial n} w_\gamma \, dS(\sigma') + \mu_\gamma \int_G w_\gamma \eta \, dS(\sigma) = 0. \tag{5.20}$$

Notons qu'on a,

$$|\int_{\partial G} \frac{\partial \eta}{\partial n} w_\gamma \, dS(\sigma)| \leq \left\| \frac{\partial \eta}{\partial n} \right\|_{L^\infty(\partial G)} \gamma^{-\frac{p-1}{2p}} \left(\gamma^{\frac{p-1}{2}} w_\gamma^p \, dS(\sigma') \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.21}$$

$$\leq C\gamma^{-\frac{p-1}{2p}}. \tag{5.22}$$

Faisons tendre $\gamma \to \infty$ et soit ν une mesure sur le bord tel que $\partial w_\gamma / \partial n \to \nu$, alors

$$\int_G w_\infty \Delta_S \eta \, dS(\sigma) + \int_{\partial G} \eta \, d\nu(\sigma') + \mu_\infty \int_G w_\infty \eta \, dS(\sigma) = 0. \tag{5.23}$$

La fonction w_∞ vérifie

$$\Delta_S w_\infty + \mu_\infty w_\infty = 0 \ \text{ dans } \ G, \tag{5.24}$$

où $w_\infty \in H^1(G)$ et $\Delta_S w_\infty \in L^2(G)$. Maintenant, on obtient par utilisation de la formule de Green,

$$\int_G w_\infty \Delta_S \eta \, dS(\sigma) - \int_{\partial G} \frac{\partial \eta}{\partial n} w_\infty \, dS(\sigma') + \int_{\partial G} \eta \, d\nu(\sigma') + \mu_\infty \int_G w_\infty \eta \, dS(\sigma) = 0. \tag{5.25}$$

Par conséquent,

$$\int_{\partial G} \frac{\partial \eta}{\partial n} w_\infty \, dS(\sigma') = 0 \qquad \forall \eta \in C^2(\overline{G}). \tag{5.26}$$

D'où,

$$w_\infty \in H_0^1(G). \tag{5.27}$$

Puisque la fonction w_∞ est une fonction propre positive de $-\Delta_S$ dans $H_0^1(G)$, elle est nécessairement dans le premier espace propre de l'opérateur $-\Delta_S$ de $H_0^1(G)$. Par conséquent $\mu_\infty = \lambda_{1,G}$ et l'application $\gamma \mapsto \mu_\gamma$ est strictement croissant de $(0, \infty)$ à $(0, \lambda_{1,G})$.

5.2 Solutions stationnaires qui changent de signe

Lorsque

$$1 < p \leq \frac{N}{N-1}, \tag{5.28}$$

la construction d'une solution qui change de signe pour l'équation (4.5) peut être effectuer de la façon suivante.

On pose $\lambda = l_{p,N}$ et on considère le problème plus générale de construire de solutions non nulles ω de l'équation (5.29) qui changent de signe.

$$\begin{cases} -\Delta_S \omega = \lambda \, \omega \ \ dans \ \ S_+^{N-1} \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \phi} + |\omega|^{p-1} \omega = 0 \ \ sur \ \ S^{N-2}, \end{cases} \tag{5.29}$$

où $\lambda \geq \Lambda_1$. (Λ_1 étant la première valeur propre de $-\Delta_S$ dans $H^1_0(S^{N-1}_+)$)

Sans perte de généralité, on considère le cas $N = 3$, dont

$$S^2_+ = \left\{ (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) : \phi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dénote par S_k le secteur

$$S_k = \left\{ (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) : \phi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, \frac{\pi}{k}] \right\}.$$

On a $\partial S_k = \partial_b S_k \cup \partial_l S_k$ où $\partial_b S_k = \{(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) : \phi \in [0, \pi/2], \theta \in \{0, \pi/k\}\}$ et $\partial_l S_k = \{(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi) : \theta \in [0, \pi/k], \phi = \pi/2\}$.

Soit $\gamma > 0$, comme dans l'Appendice 5.1, on définit la fonctionnelle

$$J_{S_k}(v) = \frac{1}{2}\int_{S_k} |\nabla_S v|^2 \, dS(\sigma) \; + \; \frac{1}{p+1}\int_{\partial_l S_k} |v|^{p+1} \, dS(\sigma'), \tag{5.30}$$

sur l'espace $\mathcal{H}(S_k)$ des fonctions $v \in H^1(S_k) \cap L^{p+1}(\partial_l S_k)$ qui s'annule sur $\partial_b S_k$. En minimisant J_{S_k} sur l'ensemble

$$\Sigma_{G,\gamma} = \left\{ v \in \mathcal{H}(S_k) : \int_{S_k} v^2 \, dS(\sigma) = 2\gamma \right\}. \tag{5.31}$$

On obtient une solution positive de,

$$\begin{cases} -\Delta_S \omega \; = \mu_\gamma \omega \;\; dans \;\; S_k, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\phi} \; + \; |\omega|^{p-1}\,\omega = 0 \;\; sur \;\; \partial_l S_k, \\ \omega = 0 \;\; \text{dans} \;\; \partial_b S_k. \end{cases} \tag{5.32}$$

À noter que $0 < \mu_\gamma < \Lambda_k$, où Λ_k est la première valeur de $-\Delta_S$ dans $H^1_0(S_k)$. On prolonge ω par réflexion par rapport aux côtés de $\partial_b S_k$, on obtient alors une solution qui change de signe pour l'équation,

$$\begin{cases} -\Delta_S \omega \; = \mu_\gamma \, \omega \;\; dans \;\; S^{N-1}_+ \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\phi} \; + \; |\omega|^{p-1}\,\omega = 0 \;\; sur \;\; S^{N-2}. \end{cases} \tag{5.33}$$

Rappelons que la suite $\{\Lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, et on a $\lim\limits_{k\to\infty} \Lambda_k = \infty$.

Finalement, si on choisit un k suffisamment grand tel qu'on a $\Lambda_k > \lambda$, alors, comme c'est montré dans l'Appendice 5.1, il existe un $\gamma > 0$, qui dépend de k, tel que $\mu_\gamma = \lambda$. Ce qui achève la construction.

À noter que cette construction permet de générer une infinité de solutions de (5.29) qui changent de signe.

5.3 Structure du problème stationnaire dans S^1_+

Pour $p > 1$, considérons le problème

$$\begin{cases} v'' \; + \left(\dfrac{1}{p-1}\right)^2 v = 0 \qquad \text{dans} \qquad (0, \pi), \\ -\, v'(0) + \Big(|v|^{p-1} v\Big)(0) \; = 0, \\ v'(\pi) + \Big(|v|^{p-1} v\Big)(\pi) = 0. \end{cases} \tag{5.34}$$

La solution est de la forme :

$$v(\theta) = a\cos\left(\frac{\theta}{p-1}\right) + b\sin\left(\frac{\theta}{p-1}\right).$$

Résoudre (5.34) est équivalent à trouver la condition sur a et b tel que la condition sur le bord soit satisfaite. Ainsi,

$$v^{'}(\theta) = -\frac{a}{p-1}\sin\left(\frac{\theta}{p-1}\right) + \frac{b}{p-1}\cos\left(\frac{\theta}{p-1}\right).$$

Pour des solutions signées, tout $p > 1$ convient. Pour obtenir des solutions strictement positives de (5.34) la condition est $p > 2$.

La condition au bord sur v donne,

$$-\frac{b}{p-1} + |a|^{p-1}a = 0 \Longleftrightarrow b = (p-1)|a|^{p-1}a,$$

et,

$$\begin{aligned}&-\frac{a}{p-1}\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right) + \frac{b}{p-1}\cos\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\\ &+\left|a\cos\left(\frac{\pi}{p-1}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right|^{p-1}\left(a\cos\left(\frac{\pi}{p-1}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right) = 0.\end{aligned}$$

Exemples : Si $p = 3$, alors $b = 2a^3$ et $16a^8 = 1$, par conséquent, $(a, b) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ou $(a, b) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Si $p = 2$, alors $b = |a|a$ et $|a| = 0$. Par conséquent, il n'existe pas de solution autre que 0.

Si $a \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}0 =& -\frac{1}{p-1}\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right) + |a|^{p-1}\cos\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\\ &+|a|^{p-1}\left|\cos\left(\frac{\pi}{p-1}\right) + (p-1)|a|^{p-1}\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right|^{p-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{p-1}\right) + (p-1)|a|^{p-1}\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right).\end{aligned}$$

Soit $X = (p-1)|a|^{p-1}$, alors X est une solution positive de

$$\begin{aligned}&-\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right) + X\cos\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\\ &+X\left|\cos\left(\frac{\pi}{p-1}\right) + X\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right|^{p-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{p-1}\right) + X\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right) = 0. \qquad (5.35)\end{aligned}$$

Si $\dfrac{\pi}{p-1} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$, l'équation (5.35) devient $X^{p+1} = 1$, ainsi

$$|a| = \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{et} \quad b = a.$$

Si $\dfrac{\pi}{p-1} = k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$, l'équation (5.35) devient $2(-1)^k X = 0$, $X = 0$ est l'unique solution.

Si $\dfrac{\pi}{p-1} \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} &X - \tan\left(\frac{\pi}{p-1}\right) \\ &\quad + X\,\tan\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\left|\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right|^{p-1}\left|\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)+X\right|^{p-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)+X\right)=0. \end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned} \Phi(X) =& X - \tan\left(\frac{\pi}{p-1}\right) \\ &+ X\tan\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\left|\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right|^{p-1}\left|\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)+X\right|^{p-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)+X\right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\Phi^{'}(X) = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\left|\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right|^{p-1}\left|\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)+X\right|^{p-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)+(p+1)X\right).$$

(i) Si $\tan(\frac{\pi}{p-1}) > 0$, alors $\Phi^{'}(X) > 0$. Puisque $\Phi(0) = -\tan(\frac{\pi}{p-1})$ et $\Phi(X) \to \infty$ lorsque $X \to \infty$, alors il existe un unique $X_0 > 0$ tel que $\Phi(X_0) = 0$. D'où l'existence d'un couple de solutions (a, b) et $(-a, -b)$ avec $a, b > 0$.

(ii) Si $\tan(\frac{\pi}{p-1}) < 0$, alors $\Phi(0) = -\tan(\frac{\pi}{p-1}) > 0$. En plus

$$\begin{aligned} \Phi^{''}(X) = p\tan\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\left|\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right|^{p-1}\left|\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)+X\right|^{p-3} \\ \left(X+\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right)\left((p+1)X+2\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right). \end{aligned}$$

X	0		$-\frac{2}{p+1}\cot(\frac{\pi}{p-1})$		$-\cot(\frac{\pi}{p-1})$		$+\infty$
$\Phi^{''}(X)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\Phi^{'}(X)$	$1+\lvert\cos(\frac{\pi}{p-1})\rvert^{p-1}$	$+$	$1-\lvert\frac{p-1}{p+1}\rvert^{p-1}\lvert\cos(\frac{\pi}{p-1})\rvert^{p-1}$	$+$	1	$\searrow$	$-\infty$
$\Phi(X)$	$-\tan(\frac{\pi}{p-1})$	$\nearrow$	A_1	$\nearrow$	1	$\nearrow$ $\searrow$	$-\infty$

Avec

$$\begin{aligned} A_1 =& -\frac{2}{p+1}\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{p-1}\right) \\ &+ \frac{2}{p+1}\left|\sin\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right|^{p-1}\left(\frac{p-1}{p+1}\right)^{p}\left|\cot\left(\frac{\pi}{p-1}\right)\right|^{p}. \end{aligned}$$

À partir du tableau de variation, on voit clairement que Φ admet un seul zéro $X_0 > -\cot(\frac{\pi}{p-1})$, alors on conclut qu'il existe uniquement deux couple de solutions (a, b) et $(-a, -b)$ avec $a, b > 0$.

Conclusion :

(i) Si $\dfrac{1}{p-1} \in \mathbb{N}$, alors 0 est l'unique solution du problème (5.34).

(ii) Si $\dfrac{1}{p-1} \notin \mathbb{N}$, alors le problème stationnaire (5.34) admet uniquement trois solutions $\{0, v, -v\}$. Où v est une solution qui peut changer de signe pour $p > 1$, et lorsque $p > 2$ la fonction v est la solution strictement positive .

5.4 Valeurs propres du Laplacien Neumann sur la demi sphère

Proposition 5.1. *On considère $N \geq 2$. La $k^{\text{ème}} + 1$ valeur propre du problème :*

$$\begin{cases} \Delta_S \, \omega \, + \, \lambda \, \omega = 0 \qquad \textit{dans} \qquad S_+^{N-1}, \\ \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0 \qquad \textit{sur} \qquad S^{N-2}, \end{cases} \tag{5.36}$$

est $\lambda_k = k\,(\,k \, + \, N \, - 2\,)\ \ (\,k \in \mathbb{N}\,)$ *, et l'espace propre d'en associé est un sous espace vectoriel des fonctions harmoniques sphériques de degré k .*

Pour le cas particulier $N = 2$, les valeurs propres sont $\lambda_k = k^2$ $(k \in \mathbb{N})$ et l'espace propre d'en associé est engendré par les fonctions $\theta \mapsto \cos(k\theta)$ où $\theta \in (0, \pi)$.

Preuve :

Rappelons que

$$S_+^{N-1} = \{x = (sin\phi \, \sigma', cos\phi) : \sigma' \in S^{N-2}, \phi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}.$$

L'équation (5.36) a une structure symétrique. Faisons donc une symétrie de l'équation par rapport à l'équateur de la manière suivante, pour un point $\sigma = (\sigma', \phi) \in S^{N-1}$, on définit la fonction $\tilde{\omega}$ sur S^{N-1} par :

$$\tilde{\omega}(\sigma', \phi) = \begin{cases} \omega(\sigma', \phi) & \text{si } \phi \in (0, \pi/2) \\ \\ \omega(\sigma', \pi - \phi) & \text{si } \phi \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Ainsi la fonction $\tilde{\omega}$ vérifie

$$\Delta_S \tilde{\omega} + \lambda \, \tilde{\omega} = 0 \ \text{ dans } \ S^{N-1}.$$

Par conséquent, la fonction $\tilde{\omega}$ est la restriction sur S^{N-1} d'un polynôme harmonique homogène d'un certain degré $k \in \mathbb{N}$ et la valeur propre $\lambda = \lambda_k = k\,(k + N - 2)$.

Rappelons qu'un polynôme P est dit homogène de degré k si

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in \mathbb{R}^N) \ P(\lambda \, x) = \lambda^k \, P(x).$$

Remarquer que le polynôme nulle est le seul polynôme homogène dont le degré k pourra prendre n'importe quel valeur de $\mathbb{N}$.

On verra maintenant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, λ_k est bien une valeur propre associée au problème (5.36). Reste à chercher parmi les polynômes harmoniques homogènes de degré k ceux qui vérifient la condition au bord du problème (5.36).

Pour $k = 0$, $\lambda_0 = 0$ est une valeur propre dont l'espace propre correspondant est les constantes.

Pour $k = 1$, la restriction des polynômes harmoniques $x_1, x_2 \cdots x_{N-1}$ constitue la base du deuxième espace propre associé à $\lambda_1 = N - 1$.

Pour $k = 2$, on voit clairement que les polynômes de la forme $P_{i,j}(x) = x_i^2 - x_j^2$ pour $i, j \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$ sont harmoniques, et la non dépendance de $P_{i,j}$ en x_N entraîne que la restriction de $P_{i,j}$ sur S_+^{N-1} vérifie (5.36) pour $\lambda = \lambda_2 = 2N$.

Pour un k quelconque, considérons un polynôme harmonique P de degré k qui ne dépend pas de la variable x_N (on pourra penser au polynôme harmonique homogène de degré k de la $N - 1$

ème dimension), si φ désigne la restriction de P sur S^{N-1}, alors on a clairement $\partial P/\partial x_N = 0$ d'où φ vérifie (5.36) pour $\lambda = \lambda_k$.

Pour N=2 :

Dans ce cas, l'équation (5.36) est,

$$\begin{cases} \omega_{\theta\theta} + \lambda\omega = 0 & \theta \in (0,\pi), \\ \\ \omega_\theta(0) = \omega_\theta(\pi) = 0. \end{cases} \tag{5.37}$$

La solution est la forme

$$\omega(\theta) = a\,\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + b\,\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta).$$

Il est facile de vérifier que la condition au bord entraîne que $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}$ et que $b = 0$.

■

5.5 Un comportement asymptotique

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et μ une mesure bornée sur $\partial\Omega$. Considérons l'équation :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 \;\; dans \;\; \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \mu \;\; sur \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.38}$$

Pour un point $x \in \partial\Omega$, on considère $\psi(x,y)$ la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \psi = 0 \;\; dans \;\; \Omega, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = \delta_x \;\; sur \;\; \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.39}$$

(À bien noter que les opérations de dérivations sont effectuées par rapport à la variable y)

Si on utilise formellement $\psi(x,.)$ comme une fonction test dans l'équation en u, on obtient,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \psi(x,y)\; d\mu(y). \tag{5.40}$$

Noter que le noyau $\psi(x,y)$ permet de décrire la 'trace' sur le bord de u par rapport à sa dérivée normale μ.

On note simplement $\psi(y) = \psi(0,y)$ et on s'intéresse à décrire le comportement de ψ quand $y \to 0$, sans perte de généralité on considère $\Omega = \mathbb{R}^2_+$.

Par réflexion $\tilde{\psi}(x_1,x_2) = \psi(x_1,x_2)$ si $x_2 \geq 0$, $\tilde{\psi}(x_1,x_2) = \psi(x_1,-x_2)$ si $x_2 < 0$.

Rappelons que $\Gamma(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\log r$ vérifie

$$-\Delta\Gamma = \delta_0 \;\; \text{dans} \;\; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

On note ψ la solution fondamentale de $L := -\Delta + I_d$ dans $\mathbb{R}^2$. En effet

$$L\psi = \delta_0 \;\; \text{dans} \;\; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2). \tag{5.41}$$

La fonction ψ est une fonction radiale et on a les comportements suivants

$$\psi(x) = 2\,\Gamma(x) \,+\, o(1) \text{ quand } x \to 0 \text{ et } \quad 0 \le \psi(x) \le ce^{-|x|} \text{ quand } |x| \to \infty.$$

Soit $\xi \in C_\Omega := \{\xi \in C^1(\overline{\Omega}) : \Delta\xi \in L^\infty(\Omega), \dfrac{\partial \xi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. On restreint l'équation (5.41) au domaine $\mathbb{R}^2_+ \backslash B(0,\epsilon)$, et utilisons ξ comme une fonction test dans cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|x|>\epsilon, x_2>0} \xi\, L\psi\, dx, \\ &= \int_{|x|>\epsilon, x_2>0} \psi\, L\xi\, dx - \int_{C_\epsilon^+} \frac{\partial \psi}{\partial n} \xi\, dS \,+\, \int_{C_\epsilon^+} \frac{\partial \xi}{\partial n} \psi(\epsilon)\, dS, \end{aligned}$$

où $C_\epsilon^+ = \{x = (x_1, x_2) : |x| = \epsilon, x_2 \ge 0\}$. Or

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{\pi} \frac{x}{|x|^2} . \frac{x}{|x|} \,(1 + \circ(1)) = \frac{1}{\epsilon\pi} \,(1 + \circ(1)) \text{ sur } C_\epsilon^+.$$

Par conséquent, lorsque $\epsilon \to 0$,

$$\int_{|x|>\epsilon, x_2>0} \psi\, L\xi\, dx \to \int_{\mathbb{R}^2_+} \psi\, L\xi\, dx.$$

Comme la mesure mono-dimensionnelle de C_ϵ^+ est $\pi\epsilon$, alors

$$\begin{aligned} \int_{C_\epsilon^+} \frac{\partial \psi}{\partial n} \xi\, dS &= \frac{1}{\epsilon\pi} \int_{C_\epsilon^+} (1 + \circ(1))\, \xi\, dS \\ &\to \xi(0), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{C_\epsilon^+} \frac{\partial \xi}{\partial n} \psi(\epsilon)\, dS &= -\frac{1}{\pi} \int_{C_\epsilon^+} \circ(1) \,\log \epsilon\, dS \\ &\to 0. \end{aligned}$$

On déduit qu'on a bien

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} \psi \,\, L\xi\, dx \,=\, \xi(0). \tag{5.42}$$

À partir de l'unicité de solution de (5.39), on conclut que la solution $\psi(x) = \psi(0, x)$ de (5.39) vérifie,

$$\psi(x) = -\frac{1}{\pi} \log|x| \,+\, o(1), \text{ quand } x \to 0 \text{ et } 0 \le \psi(x) \le ce^{-|x|} \text{ quand } x \to \infty. \tag{5.43}$$

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ avec $N \ge 3$. On montre d'une manière similaire que la solution $\psi(x) := \psi(0, x)$ de (5.39) vérifie

$$\psi(x) = \frac{2}{N\,(N-2)\,\omega_N} |x|^{2-N} \,+\, o(1), \text{ quand } x \to 0 \text{ et } 0 \le \psi(x) \le ce^{-|x|} \text{ quand } x \to \infty, \tag{5.44}$$

où

$$\omega_N = \int_{B(0,1)} dx = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)}.$$

■